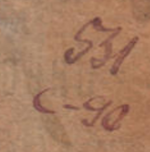


G. SOUSLOW,
professeur à l'Université de Kieff.

Traité de mécanique rationnelle.

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Г. К. СУСЛОВА,
профессора университета Св. Владиміра.

Томъ I.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

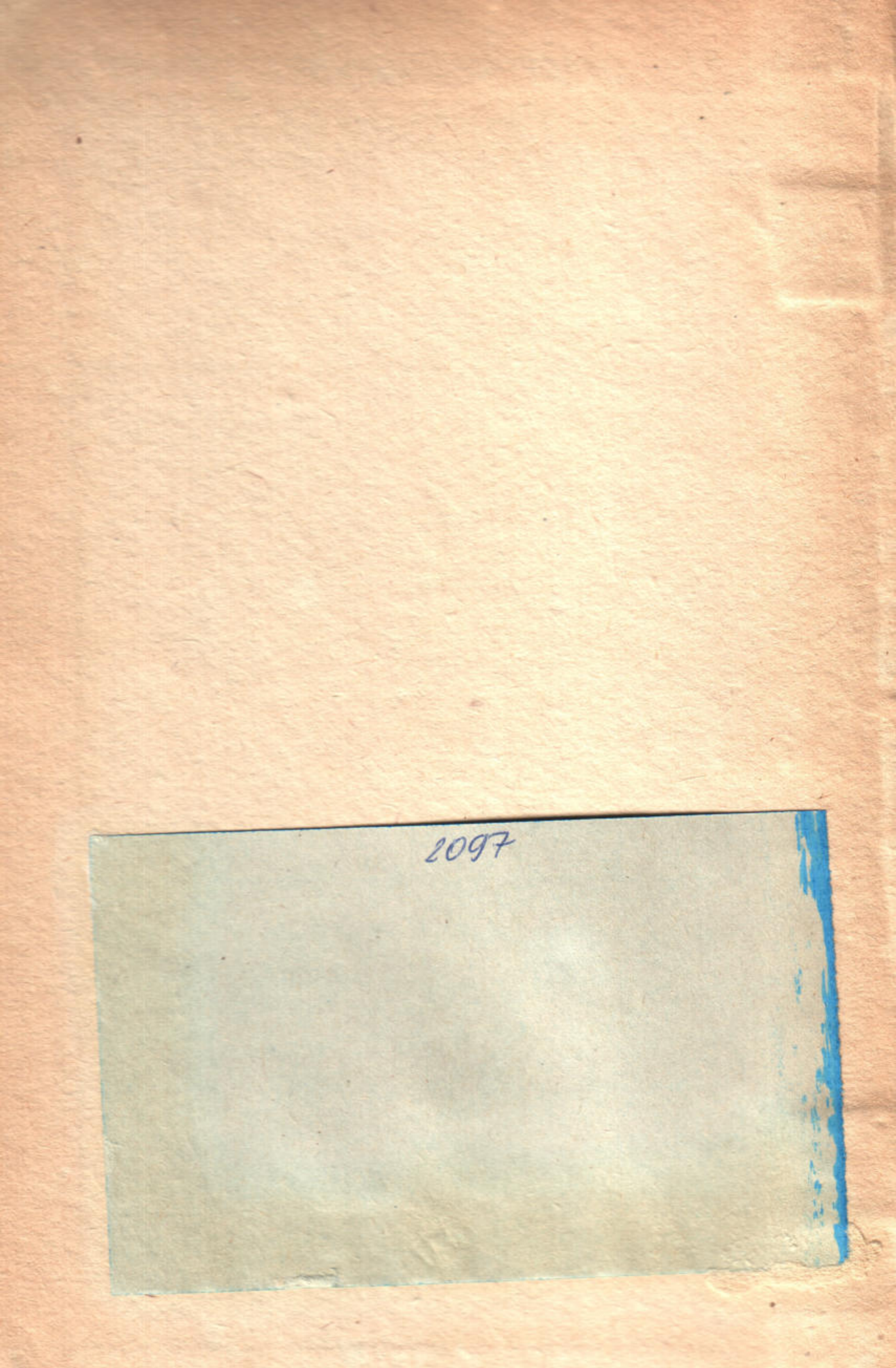
КИНЕМАТИКА.

ИЗДАНІЕ ВТОРОЕ.





ИЗДАНІЕ КНИГОПРОДАВЦА Н. Я. ОГЛОБЛИНА
Кіевъ, Крещатикъ № 33. || С.-Петербургъ, Екатерин. № 4.
Кіевъ. 1911.


2097

G. SOUSLOW,
professeur à l'Université de Kieff.

Traité de mécanique rationnelle.

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Г. К. СУСЛОВА,
профессора университета Св. Владиміра.



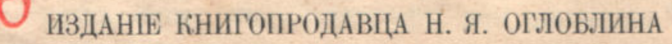
Томъ I.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

КИНЕМАТИКА.

ИЗДАНІЕ ВТОРОЕ.





ИЗДАНІЕ КНИГОПРОДАВЦА Н. Я. ОГЛОБЛИНА
Кіевъ, Крещатикъ № 33. || С.-Петербургъ, Екатерин. № 4.
Кіевъ. 1911.

ПРОГРАММА ПО МЕХАНИКѢ.

I. Введеніе (теорія векторовъ).

Векторы обыкновенные. Геометрическія сложеніе и вычитаніе. Разложеніе вектора.

Векторы приложенные. Моменты приложеннаго вектора около полюса и около оси. Взаимный моментъ двухъ векторовъ.

Система обыкновенныхъ векторовъ. Главный векторъ. Координаты системы.

Система приложенныхъ векторовъ. Главный моментъ. Координаты системы. Зависимость координатъ системы отъ выбора полюса. Инваріанты. Центральная ось. Распредѣленіе главныхъ моментовъ въ пространствѣ. Построеніе Poncelet.

Эквивалентныя системы приложенныхъ векторовъ. Простѣйшія системы. Замѣна данной системы векторовъ простѣйшею, ей эквивалентною. Теоремы Chasles и Moebius'а. Плоская система. Система параллельныхъ векторовъ. Центръ системы.

Векторъ-функція. Годографъ. Геометрическая производная. Ортъ. Проекція геометрической производной на неизмѣнное и подвижное направленія. Геометрическій интегралъ отъ вектора.

Геометрическая производная системы приложенныхъ векторовъ. Зависимость координатъ геометрической производной отъ полюса.

II. Кинематика точки.

Единицы длины и времени. Движеніе.

Конечныя уравненія движенія точки. Траекторія. Скорость. Проекціи скорости точки на неподвижное и подвижное направленія и на оси криволинейныхъ координатъ. Опредѣленіе движенія точки по данной скорости. Погонная линія. Скорость линейная, обобщенная, угловая и секторіальная.

Годографъ скорости. Годографъ для движенія точки по коническому сѣченію съ постоянною секторіальною скоростью. Ускореніе. Стрѣлка. Проекціи ускоренія на неподвижное и подвижное направленія, на касательную и главную нормаль троекторіи и на оси криволинейныхъ координатъ. Геометрическая производная отъ скорости, какъ отъ приложеннаго вектора. Выводъ закона Ньютона изъ законовъ Кеплера.

III. Кинематика неизмѣняемой системы (твердаго тѣла).

Твердое тѣло. Движенie прямое и обращенное. Координаты твердаго тѣла. Эйлеровы углы. Движенie поступательное. Вращенie тѣла около неподвижной точки. Движенie параллельно плоскости. Кардановское движенie прямое и обращенное. Центръ и ось конечнаго вращенiя. Общiй случай движенiя твердаго тѣла.

Скорости точекъ твердаго тѣла для движенiя поступательнаго. Скорости для движенiя вращательнаго. Мгновенная угловая скорость. Мгновенная ось. Выраженiя для проекцiй мгновенной угловой скорости на оси неподвижныя и на оси, неизмѣнно съ тѣломъ связанныя, черезъ Эйлеровы углы. Проекцiи геометрической производной по времени отъ перемѣннаго вектора на оси, неизмѣнно съ твердымъ тѣломъ связанныя. Скорости точекъ твердаго тѣла, движущагося произвольнымъ образомъ. Скорости точекъ твердаго тѣла, движущагося параллельно плоскости. Мгновенный центръ.

Центроиды. Центроиды для Кардановскаго движенiя и для движенiя антипараллелограмма. Аксоиды для вращательнаго движенiя. Аксоиды винтовыхъ осей. Гиперболическiя колеса.

Ускоронiя точекъ твердаго тѣла, движущагося произвольнымъ образомъ. Центръ ускоренiя для движенiя параллельно плоскости.

Движенie точки абсолютное и относительное. Движенie переносное. Зависимость между скоростями абсолютнаго и относительнаго движенiй точки. Связь между ускоренiями. Ускоренie поворотное. Теорема Корiолиса. Величина и направленie поворотнаго ускоренiя для точки, движущейся по земной поверхности. Движенiя твердаго тѣла относительное и абсолютное. Движенie переносное. Зависимость между поступательными и угловыми скоростями въ движенiяхъ абсолютномъ и относительномъ. Разложенie движенiй точки и твердаго тѣла. Разложенie скорости и ускоренiя точки и угловой скорости тѣла.

Настоящее второе изданіе моихъ „Основъ аналитической механики“ по содержанію не отличается существенно отъ перваго изданія; по формѣ сдѣланы нѣкоторыя измѣненія. Во избѣжаніе задержки выхода книги первый томъ раздѣленъ на три части: I—кинематика, II—динамика точки и III—динамика системы. Затѣмъ введены два разбора шрифта съ цѣлью отдѣлить ярче существенное отъ менѣе важнаго. II-ая и III-ья части послѣдуютъ за I-ою въ самомъ непродолжительномъ времени.

Пользуюсь настоящимъ случаемъ, чтобы выразить свою благодарность всѣмъ тѣмъ, что удостоилъ меня своими замѣчаніями по поводу перваго изданія и такимъ образомъ далъ возможность внести въ новое изданіе тѣ или другія улучшенія.

Проф. *Г. Сусловъ.*

Кіевъ. 1910.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ВВЕДЕНІЕ (теорія векторовъ).

Векторы.

Векторы приложенные.

Система векторовъ.

Система приложенныхъ векторовъ.

Системы эквивалентныя.

Векторъ—функцiи.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

КИНЕМАТИКА.

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ.

ГЛАВА I.

Конечныя уравненiя движенiя точки. Скорость точки.

ГЛАВА II.

Годографъ скорости точки. Ускореніе точки.

КИНЕМАТИКА ТВЕРДАГО ТѢЛА.

ГЛАВА III.

Координаты твердаго тѣла. Конечныя уравненія движенія.

ГЛАВА VI.

Скорости точекъ твердаго тѣла.

ГЛАВА V.

Центроиды. Аксоиды.

ГЛАВА VI.

Ускоренія точекъ твердаго тѣла.

ГЛАВА VII.

Относительное движеніе.

ВВЕДЕНІЕ.

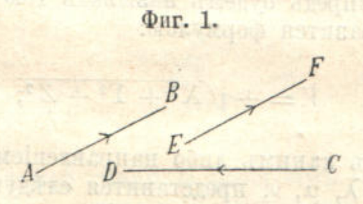
(Теорія векторовъ).

При изложеніи Аналитической Механики почти непрерывно приходится пользоваться опредѣленіями и теоремами того отдѣла Геометріи, который носитъ названіе Теоріи векторовъ. Поэтому прежде всего познакомимся съ основными положеніями этой теоріи, ограничиваясь лишь крайне необходимымъ.

Векторы.

1. Опредѣленіе вектора. Геометрическое равенство. Векторомъ называется отрѣзокъ прямой, имѣющій опредѣленную длину и опредѣленное направленіе. Точки, ограничивающія векторъ, носятъ особыя названія: одна называется началомъ вектора, другая концомъ его. Направленіе вектора идетъ отъ начала къ концу. На чертежахъ направленіе вектора обыкновенно означаютъ стрѣлкою, а въ формулахъ выражаютъ порядкомъ буквъ, поставленныхъ при концахъ отрѣзка, при чемъ буква, означающая начало, ставится впереди.

Фиг. 1.



Такъ векторы, изображенные на фиг. 1, если имъ приписаны направленія, указанныя стрѣлками, читаются AB, CD; точки A и C служатъ началами, B и D концами; при противоположныхъ направленіяхъ тѣ же векторы слѣдовало бы обозначать BA и DC,

и тогда пары точекъ A, C и B, D помѣнялись бы своими названіями.

Два вектора одинаковой длины, лежащіе на параллельныхъ прямыхъ и одинаково направленные, называются геометрически равными. Это положеніе вытекаетъ изъ даннаго выше опредѣленія вектора: дѣйствительно, въ опредѣленіи за существенные элементы вектора признаны только его длина и направленіе. Геометрическое равенство выражается алгебрическимъ знакомъ $=$, только приравниваемые другъ другу векторы заключаются въ скобки; такъ, геометрическое равенство векторовъ AB и EF (фиг. 1) выразится слѣдующимъ образомъ:

$$(AB) = (EF). \tag{1}$$

Два вектора, равные по длинѣ, лежащіе на параллельныхъ прямыхъ, но противоположно направленные, называются противоположными.

2. Координаты вектора. Векторъ намъ вполнѣ извѣстенъ, если мы знаемъ его длину l и направленіе прямой, на которой онъ лежитъ, т. е. три косинуса α, β, γ угловъ, образуемыхъ этою прямою съ прямоугольными осями координатъ $Oxyz$. Отсюда видно, что векторъ опредѣляется тремя независимыми другъ отъ друга величинами, такъ какъ между косинусами α, β, γ существуетъ зависимость: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Замѣтимъ, что заданіе длины l и двухъ косинусовъ, напр. α и β, не опредѣляетъ вектора однозначно: изъ вышеприведеннаго соотношенія найдемъ для третьяго косинуса γ два значенія, отличающіяся другъ отъ друга знаками и, слѣд., однѣмъ и тѣмъ же величинамъ α, β и l соотвѣтствуютъ два вектора (симметрично наклоненные къ плоскости xOy). Величины, опредѣляющія векторъ, носятъ названіе координатъ вектора. Всего удобнѣе принять за координаты вектора V три его проекціи*) на оси координатъ. Эти проекціи мы будемъ обозначать V_x, V_y, V_z или X, Y, Z. Въ такихъ координатахъ длина вектора, которую впредь будемъ называть тою же буквою, какъ и самъ векторъ, выразится формулою:

$$V = +\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}; \tag{2}$$

уголъ φ вектора съ какимъ либо направленіемъ U, характеризуемымъ косинусами λ, μ, ν, представится слѣдующимъ образомъ:

---

*) Съ соотвѣтственными знаками: $+$, когда направленіе проекціи совпадаетъ съ направленіемъ оси, и $-$, въ противоположномъ случаѣ. Направленіе проекціи идетъ отъ проекціи начала вектора къ проекціи конца.

$$\cos\varphi = \frac{1}{V}(X\lambda + Y\mu + Z\nu). \tag{3}$$

Заданіе вектора его проекціями, очевидно, однозначно. Если два вектора: V_1 съ координатами X_1, Y_1, Z_1 и V_2 съ координатами X_2, Y_2, Z_2 геометрически равны, то

$$X_1 = X_2\,,\ Y_1 = Y_2\,,\ Z_1 = Z_2\,; \tag{4}$$

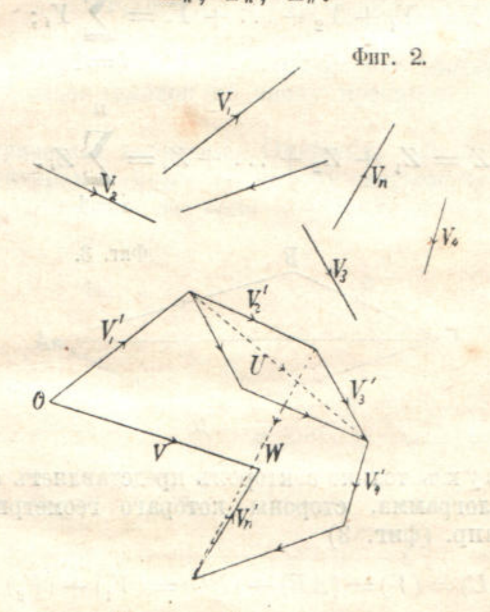
а если они противоположны, то

$$X_1 = -X_2\,,\ Y_1 = -Y_2\,,\ Z_1 = -Z_2\,. \tag{5}$$

3. Геометрическое сложеніе. Положимъ, намъ даны n векторовъ V_1, $V_2, \ldots V_n$; пусть ихъ координаты будутъ

$$X_1\,,\ Y_1\,,\ Z_1\,;$$
$$X_2\,,\ Y_2\,,\ Z_2\,;$$
$$\cdots\cdots$$
$$X_n\,,\ Y_n\,,\ Z_n\,.$$

Фиг. 2.



Изъ произвольной точки O построимъ (фиг. 2) векторъ V'_1, геометрически равный вектору V_1; изъ конца вектора V_1' построимъ векторъ V_2', геометрически равный V_2; изъ конца V_2' век-

торъ V_3', геометрически равный V_3 и т. д. до V_n'. Векторъ V, имѣющій начало въ началѣ вектора V_1' и конецъ въ концѣ вектора V_n', называется **геометрическою суммою** векторовъ $V_1, V_2, \ldots V_n$, а сама произведенная нами операція **геометрическимъ сложеніемъ**. Геометрическое сложеніе обозначается алгебрическимъ знакомъ $+$, только символы слагаемыхъ векторовъ заключаются въ скобки. Такъ, при вышеуказанныхъ обозначеніяхъ:

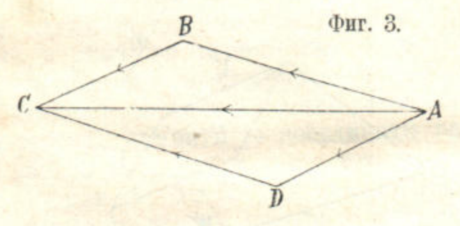
$$(V) = (V_1) + (V_2) + \ldots + (V_n). \tag{6}$$

Если координаты вектора V означимъ X, Y, Z, то, очевидно, предъидущее геометрическое равенство влечетъ за собою слѣдующія три алгебраическія:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i;$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i; \tag{7}$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i.$$



Фиг. 3.

Сумма **двухъ** только векторовъ представляетъ собою **діагональ** параллелограмма, стороны котораго геометрически равны слагаемымъ, напр. (фиг. 3)

$$(AC) = (V) = (AB) + (BC) = (V_1) + (V_2).$$

Такъ какъ, съ другой стороны,

$$(V) = (AD) + (DC) = (V_2) + (V_1);$$

то, слѣд.,

$$(V_1) + (V_2) = (V_2) + (V_1);$$

т. е. сумма двухъ векторовъ не зависитъ отъ порядка, въ которомъ взяты слагаемые.

Тѣмъ же свойствомъ обладаетъ и сумма произвольнаго числа векторовъ. Дѣйствительно, она не измѣнится, если мы нѣсколько рядомъ стоящихъ слагаемыхъ замѣнимъ ихъ суммою. Такъ (фиг. 2) слагаемыя V_3', V_4', V_5' могутъ быть замѣнены ихъ суммою W. Сдѣлаемъ такую замѣну для двухъ рядомъ стоящихъ векторовъ, напр. V_2' и V_3'; по предъидущему, сумма ихъ U не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ; слѣд., и общая сумма не мѣняется отъ перестановки двухъ смежныхъ слагаемыхъ. Если же въ ряду какихъ либо элементовъ мы имѣемъ право переставить два рядомъ стоящіе, то, какъ извѣстно, повторяя этотъ пріемъ, мы можемъ размѣстить элементы ряда въ такомъ порядкѣ, въ какомъ намъ угодно; слѣд., на геометрическую сумму произвольнаго числа векторовъ порядокъ слагаемыхъ вовсе не вліяетъ.

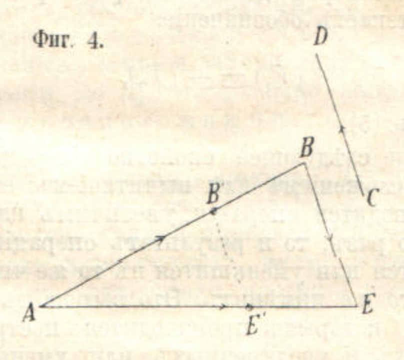
Всякій векторъ есть геометрическая сумма трехъ своихъ координатъ:

$$(V_i) = (X_i) + (Y_i) + (Z_i),$$

если каждой координатѣ дадимъ направленіе соотвѣтственной оси или противоположное (смотря по знаку проекціи).

4. Геометрическое вычитаніе. Операція, при помощи которой по даннымъ векторамъ—суммѣ и одному слагаемому, отыскивается другое слагаемое, носитъ названіе геометрическаго вычитанія.

Фиг. 4.



Если (фиг. 4) данная сумма векторъ AB, а данное слагаемое векторъ CD, то искомое слагаемое получится, если къ AB приба-

вимъ векторъ BE, противоположный CD. Дѣйствительно, какъ не трудно видѣть,

$$(8) \qquad (AB) = (AE) + (EB) = (AE) + (CD),$$

что и желали имѣть.

Геометрическое вычитаніе обозначается алгебраическимъ знакомъ —, только векторы, надъ которыми производится дѣйствіе, заключаются въ скобки; такъ, въ нашемъ случаѣ

$$(9) \qquad (AE) = (AB) - (CD).$$

Если векторы AE, AB, CD означимъ V, V_1, V_2, а координаты ихъ соотвѣтственно X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2, то предъидущее геометрическое равенство

$$(10) \qquad (V) = (V_1) - (V_2)$$

равносильно слѣдующимъ тремъ алгебраическимъ:

$$(11) \qquad \begin{aligned} X &= X_1 - X_2; \\ Y &= Y_1 - Y_2; \\ Z &= Z_1 - Z_2. \end{aligned}$$

Выраженія (8) и (9) обнаруживаютъ, что въ геометрическихъ равенствахъ мы можемъ переносить члены изъ одной части въ другую по тому же правилу, какъ и въ алгебраическихъ. Такъ какъ сумма противоположныхъ векторовъ V_1 и V_2, очевидно, равна нулю, т. е. даетъ векторъ, длина котораго равна нулю, то изъ предъидущаго вытекаетъ обозначеніе:

$$(V_1) = -(V_2),$$

что согласуется съ (5).

Замѣтимъ еще слѣдующее свойство операцій, называемыхъ геометрическимъ сложеніемъ или вычитаніемъ: если всѣ векторы, надъ коими производится операція, увеличимъ или уменьшимъ въ одно и то же число разъ, то и результатъ операціи (т. е. сумма или разность) увеличится или уменьшится въ то же число разъ, но направленія своего не измѣнитъ. Это вытекаетъ изъ подобія фигуръ, при помощи которыхъ производится построеніе для векторовъ неизмѣненныхъ и увеличенныхъ или уменьшенныхъ. Такъ, напр., пусть изъ вектора AB (фиг. 4) мы вычли векторъ CD; разность представилась векторомъ AE. Если же вмѣсто векторовъ AB и CD возьмемъ въ полтора раза меньшіе векторы AB' и $E'B'$,

то и разность $A'E'$ будетъ въ полтора раза меньше прежней AE, но параллельна ей, какъ это слѣдуетъ изъ подобія треугольниковъ ABE и $AB'E'$.

5. Разложеніе вектора. Составляющіе векторы. Геометрическое вычитаніе представляетъ собою частный случай операціи болѣе общаго характера, носящей названіе разложенія вектора. Разложить данный векторъ это значитъ представить его, какъ сумму нѣсколькихъ векторовъ, называемыхъ его составляющими. Условія, при которыхъ производится разложеніе, могутъ быть крайне разнообразны. Всего чаще даются направленія составляющихъ. Если число данныхъ направленій превышаетъ три, задача становится неопредѣленною. Когда направленій три (не лежащихъ въ одной плоскости), составляющіе векторы будутъ ребрами параллелепипеда, діагональю котораго служитъ данный векторъ. При двухъ данныхъ направленіяхъ задача возможна лишь въ томъ случаѣ, когда эти направленія лежатъ въ одной плоскости съ даннымъ векторомъ, и тогда искомые составляющіе будутъ сторонами параллелограмма, діагональю коего служитъ данный векторъ.

Векторы приложенные.

6. Опредѣленіе приложеннаго вектора. Векторы эквивалентные и прямопротивоположные. Векторомъ приложеннымъ называется отрѣзокъ данной длины и даннаго направленія, лежащій на данной прямой. Эту прямую называютъ основаніемъ вектора. Иначе можно сказать: векторъ приложенный—это векторъ, лежащій на данной прямой.

Два приложенныхъ вектора равной длины и одинаковаго направленія, лежащіе на общемъ основаніи, носятъ названіе эквивалентныхъ или равносильныхъ.

Два приложенныхъ вектора равной длины, лежащіе на одномъ и томъ же основаніи, но противоположно направленные, называются прямопротивоположными.

7. Координаты приложеннаго вектора. Для опредѣленія приложеннаго вектора надо задать его длину l и ту прямую, на которой онъ лежитъ. Положеніе прямой опредѣляется четырьмя независимыми другъ отъ друга величинами, напр., четырьмя коэффиціентами: p, q, r и s, въ уравненіяхъ проекцій прямой на координатныя плоскости:

$$y = px + q;\quad z = rx + s.$$

Такимъ образомъ число независимыхъ другъ отъ друга величинъ, опредѣляющихъ приложенный векторъ или, иначе, число

независимыхъ координатъ приложеннаго вектора равняется пяти. Какъ выбрать эти координаты, зависитъ отчасти отъ нашего произвола. Напр., по предъидущему, за координаты можемъ взять величины l, p, q, r и s; но такое заданіе будетъ не однозначно: однимъ и тѣмъ же значеніямъ l, p, q, r и s соотвѣтствуютъ два вектора (прямопротивоположныхъ). Приложенный векторъ опредѣлится однозначно, если за координаты возьмемъ три проекціи его на координатныя оси и двѣ координаты слѣда основанія на какой либо координатной плоскости.

Въ послѣдующемъ изложеніи мы будемъ задавать приложенный векторъ V шестью координатами: тремя проекціями вектора X, Y, Z на координатныя оси и тремя координатами какой либо точки, лежащей на основаніи. Эту точку мы будемъ называть точкою приложенія вектора и обыкновенно будемъ предполагать, что она совпадаетъ съ его началомъ.

Такъ какъ число выбранныхъ нами координатъ превышаетъ на единицу число независимыхъ, то или эти координаты связаны нѣкоторымъ уравненіемъ, или одна изъ нихъ остается неопредѣленною. Очевидно, въ нашемъ случаѣ имѣетъ мѣсто второе обстоятельство: одной изъ координатъ точки приложенія для того же самаго вектора мы можемъ дать произвольное значеніе. Такъ, координаты

$$X,\ Y,\ Z,\ x,\ y,\ z \tag{12}$$

и координаты

$$X,\ Y,\ Z,\ \xi,\ \eta,\ \zeta \tag{13}$$

опредѣляютъ одинъ и тотъ же приложенный векторъ, если только соблюдено соотношеніе

$$\frac{\xi-x}{X}=\frac{\eta-y}{Y}=\frac{\zeta-z}{Z}. \tag{14}$$

Ясно само собою, что при переходѣ отъ значеній координатъ (12) къ значеніямъ (13) можно одной изъ величинъ ξ, η, ζ дать произвольно выбранное значеніе *). Такъ, координатѣ z вектора

$$1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3$$

*) Исключеніе имѣетъ мѣсто только тогда, когда какой либо изъ знаменателей (14) обращается въ нуль, напр. X; въ такомъ случаѣ координата ξ не можетъ измѣняться.

можемъ дать значеніе 0; тогда найдемъ

$$1, 2, 3, 0, 0, 0;$$

или -6; тогда получимъ

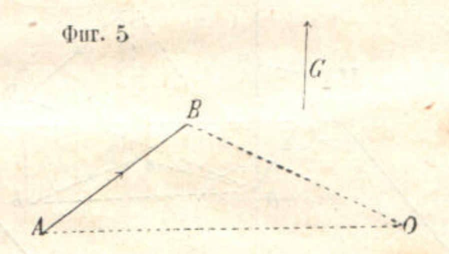
$$1, 2, 3, -2, -4, -6$$

и т. д. Соотношеніе (14) при текущихъ координатахъ ξ, η, ζ представляетъ собою уравненіе основанія.

Координаты эквивалентныхъ векторовъ всегда могутъ быть сдѣланы одинаковыми.

8. Моментъ приложеннаго вектора около точки (полюса). Пусть мы имѣемъ (фиг. 5) приложенный векторъ AB и какую либо точку или, какъ будемъ говорить, полюсъ O. Построимъ треугольникъ, имѣющій вершину въ O, а основаніемъ данный векторъ AB. Въ этомъ треугольникѣ будемъ различать двѣ стороны:

Фиг. 5



лицевую и изнанку. Отличить одну сторону отъ другой можемъ слѣд. образомъ. Станемъ въ плоскости треугольника вращать прямую, соединяющую полюсъ съ началомъ вектора, до совпаденія ея съ прямою, проходящею черезъ полюсъ и конецъ вектора; при томъ такъ вращать, чтобы точка встрѣчи прямой и вектора двигалась по направленію вектора. Для наблюдателя, стоящаго внѣ плоскости треугольника, это вращеніе будетъ казаться происходящимъ по часовой стрѣлкѣ (по солнцу) или противъ нея въ зависимости отъ того, на какую сторону треугольника онъ смотритъ. Мы условимся считать сторону треугольника лицевою, если, глядя на нее, наблюдатель увидитъ вращеніе происходящимъ по стрѣлкѣ часовъ. Векторъ G, пропорціональный площади треугольника, перпендикулярный къ его плоскости и направленный отъ изнанки къ лицевой сторонѣ, называется моментомъ даннаго приложеннаго вектора около даннаго полюса. Обыкновенно коэффиціентъ пропорціональности принимается равнымъ двумъ, и тогда численно моментъ равняется произведенію изъ длины вектора на разстоя-

ABC

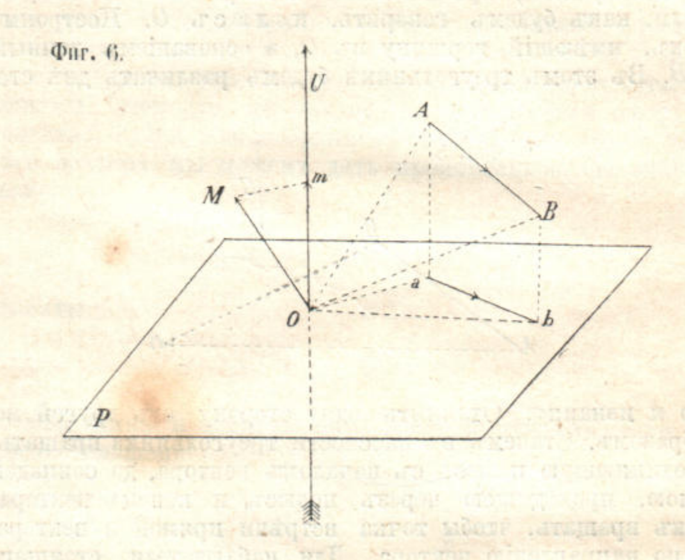
ніе основанія отъ полюса, или, какъ говорятъ, на плечо вектора около полюса.

Очевидно, эквивалентные векторы имѣютъ равные, а прямопротивоположные векторы — противоположные моменты около любого полюса.

Моментъ вектора отличнаго отъ нуля можетъ равняться нулю только около полюса, лежащаго на основаніи.

9. Моментъ приложеннаго вектора около оси. Прямая, на которой означено направленіе, называется осью. Положимъ, намъ даны (фиг. 6 и 7) приложенный векторъ AB и нѣкоторая ось U. Проведемъ какую либо плоскость P, перпендикулярную къ U. Моментъ проекціи ab вектора AB на эту плоскость около слѣда O оси U на той же плоскости называется моментомъ вектора AB

Фиг. 6.



около оси U. Ясно само собою, что разсматриваемый моментъ вовсе не зависитъ отъ положенія плоскости P, лишь бы она была перпендикулярна къ U. Моментъ вектора около какой либо оси всегда параллеленъ этой оси, хотя можетъ быть направленъ или въ одну съ нею сторону или въ противоположную. Въ первомъ случаѣ моментъ считается положительнымъ, во второмъ отрицательнымъ *).

*) То же условіе, что и относительно проекціи вектора на ось, см. прим. къ § 2.

Нетрудно показать, что моментъ приложеннаго вектора около оси равняется проекціи на ось момента вектора около какого либо полюса на оси. Пусть (фиг. 6 и 7) OM и Om моменты векторовъ AB и ab около O; тогда $Om = OM \cos\varphi$, гдѣ φ уголъ между OM и U, такъ какъ съ одной стороны

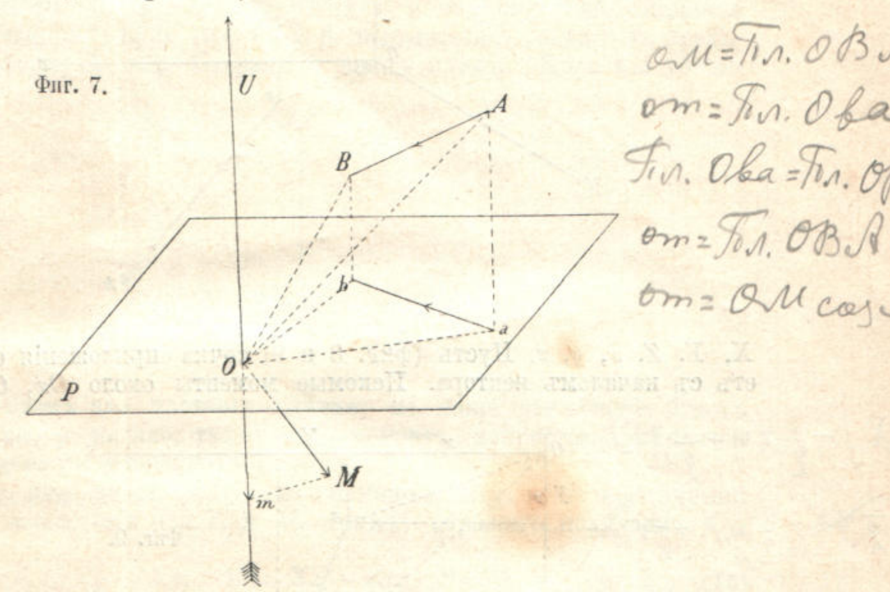
$$\text{Площ. } \Delta\, Oab = \pm \text{Площ. } \Delta\, OAB.\ \cos\varphi;$$

а съ другой стороны

$$Om = \pm 2 \text{ Площ. } \Delta\, Oab,$$

причемъ одновременно должны быть сохранены въ обѣихъ формулахъ либо два верхнихъ, либо два нижнихъ знака.

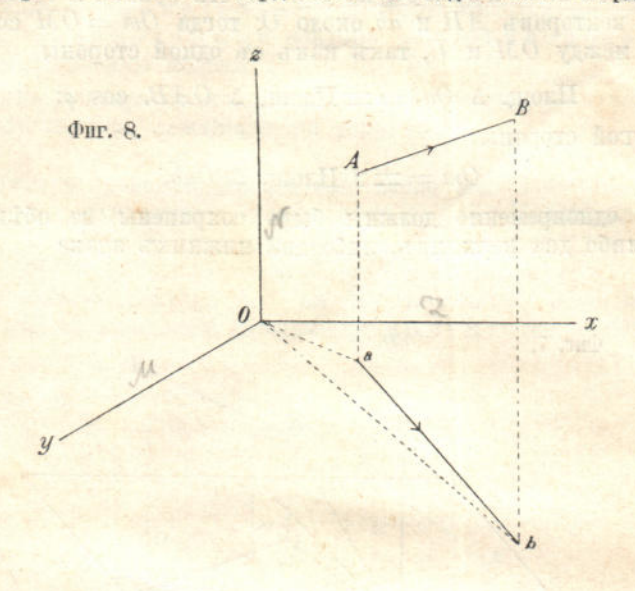
Фиг. 7.



Отсюда вытекаетъ слѣдующее: если черезъ какой либо полюсъ проведемъ три взаимно перпендикулярныя оси, то моментъ любого вектора около этого полюса равенъ геометрической суммѣ моментовъ того же вектора около трехъ проведенныхъ осей, такъ какъ по § 3 всякій векторъ представляетъ собою геометрическую сумму своихъ координатъ, т. е. проекцій на три взаимно ортогональныя оси. Если же построенныя оси не взаимно перпендикулярны, а образуютъ другъ съ другомъ косые углы, то вышеприведенное положеніе невѣрно *).

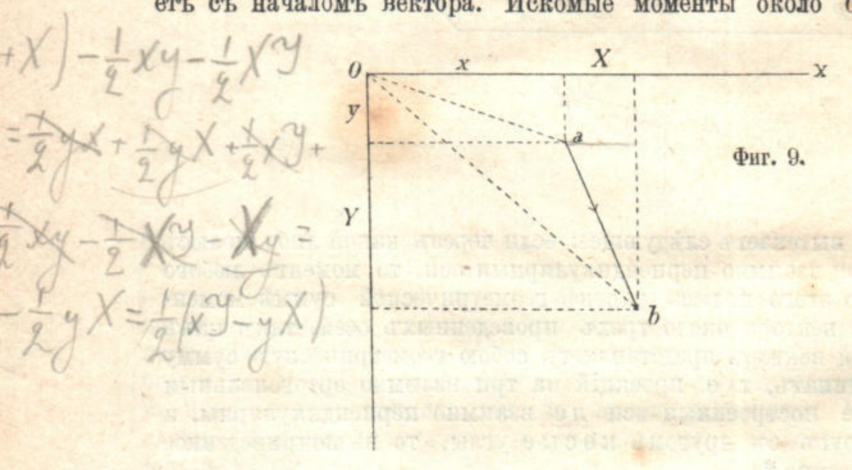
*) Если тогда отъ полюса отложимъ на осяхъ векторы, изображающіе моменты даннаго вектора около построенныхъ осей, то моментъ около полюса будетъ служить діаметромъ сферы, проходящей черезъ полюсъ и концы отложеній.

10. Аналитическое выраженіе для моментовъ приложеннаго вектора около осей координатъ. Вычислимъ теперь моменты приложеннаго вектора около осей координатъ по заданнымъ координатамъ



Фиг. 8.

X, Y, Z, x, y, z. Пусть (фиг. 8 и 9) точка приложенія совпадаетъ съ началомъ вектора. Искомые моменты около Ox, Oy и Oz



Фиг. 9.

означимъ соотвѣтственно L, M, N. Начнемъ съ вычисленія N. Проекція a начала вектора на плоскость xOy будетъ имѣть сво-

ими координатами: x, y; а проекція b конца: $x+X$; $y+Y$; слѣд., удвоенная площадь треугольника Oab, по извѣстной формулѣ аналитической геометріи, выразится такъ:

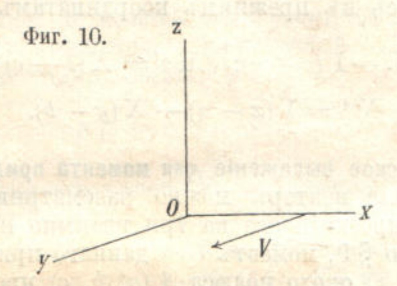
$$2 \text{ площ. } \Delta\ Oab = \pm[(y+Y)x-(x+X)y] = \pm(Yx-Xy);$$

откуда

$$N = \pm(Yx-Xy).$$

Чтобы опредѣлить, который изъ двухъ знаковъ долженъ быть сохраненъ, приложимъ нашу формулу къ частному случаю. Возьмемъ векторъ: O, Y, O, x, O, O; Y и x положительны. Моментъ такого вектора *) (фиг. 10) по § 8 положителенъ, слѣд., въ предъидущей формулѣ надо сохранить знакъ плюсъ. Хотя мы убѣдились въ этомъ для частнаго случая, но наше заключеніе будетъ справедливо и вообще, такъ какъ моментъ непрерывно мѣняется съ измѣненіемъ координатъ вектора.

Фиг. 10.



Изъ выраженія для N съ помощью круговой подстановки найдемъ выраженія для L и M. Такимъ образомъ получаемъ:

$$L = Zy - Yz; \quad M = Xz - Zx; \quad N = Yx - Xy. \tag{15}$$

Если бы точка приложенія не совпадала съ началомъ вектора, то по (14) координаты ξ, η, ζ начала выразились бы такъ:

$$\xi = x + \lambda X; \quad \eta = y + \lambda Y; \quad \zeta = z + \lambda Z;$$

гдѣ черезъ λ означена общая величина отношеній. Подстановка ξ, η, ζ въ формулы (15), вмѣсто x, y, z, очевидно, не измѣнила бы ихъ вида.

*) Относительно системы осей предполагается всегда, что для наблюдателя, стоящаго вдоль оси Oz такъ, чтобы направленіе оси шло отъ ногъ къ головѣ, и смотрящаго вдоль оси Ox, ось Oy идетъ слѣва направо.

По выраженіямъ (15) легко найти моменты даннаго вектора около осей параллельныхъ координатнымъ, но проходящихъ черезъ точку A съ координатами a, b, c. Для этого перенесемъ начало въ точку A, не измѣняя направленія осей; тогда новыя координаты вектора: X', Y', Z', x', y', z' будутъ такъ связаны съ прежними:

$$X' = X,\ Y' = Y,\ Z' = Z;$$

$$x' = x - a;\ y' = y - b;\ z' = z - c.$$

Примѣняя (15) для моментовъ $L^{(A)}$, $M^{(A)}$, $N^{(A)}$ около новыхъ осей, получимъ выраженія:

$$L^{(A)} = Z'y' - Y'z';\quad M^{(A)} = X'z' - Z'x';\quad N^{(A)} = Y'x' - X'y';$$

откуда, возвращаясь къ прежнимъ координатамъ, и найдемъ:

$$L^{(A)} = Z(y-b) - Y(z-c);\quad M^{(A)} = X(z-c) - Z(x-a);$$

$$(16)\qquad N^{(A)} = Y(x-a) - X(y-b).$$

11. Аналитическое выраженіе для момента приложеннаго вектора около полюса. Всякій векторъ можно разсматривать какъ геометрическую сумму проекцій его на три взаимно перпендикулярныя оси (§ 3); слѣд., по § 9, моментъ $G^{(A)}$ даннаго приложеннаго вектора (X, Y, Z, x, y, z) около полюса A (a, b, c) представляется какъ геометрическая сумма моментовъ этого вектора около осей, проходящихъ черезъ A и параллельныхъ координатнымъ. По (16) координаты вектора $G^{(A)}$: $G_x^{(A)}$, $G_y^{(A)}$, $G_z^{(A)}$, — представятся такъ:

$$G_x^{(A)} = L^{(A)} = Z(y-b) - Y(z-c);$$

$$(17)\qquad G_y^{(A)} = M^{(A)} = X(z-c) - Z(x-a);$$

$$G_z^{(A)} = N^{(A)} = Y(x-a) - X(y-b).$$

Если точка A совпадаетъ съ началомъ координатъ, то моментъ G будетъ имѣть своими координатами:

$$(18)\qquad G_x = Zy - Yz;\quad G_y = Xz - Zx;\quad G_z = Yx - Xy;$$

а величина его найдется по формулѣ:

$$(19)\qquad G^2 = (Zy - Yz)^2 + (Xz - Zx)^2 + (Yx - Xy)^2.$$

$g^{(A)2} = [Z(y-b) - Y(z-c)]^2 + [X(z-c) - Z(x-a)]^2 + [Y(x-a) - X(y-b)]^2$

12. Аналитическое выраженіе момента приложеннаго вектора около произвольной оси. По § 9 моментъ $K^{(U)}$ даннаго приложен-

наго вектора (X, Y, Z, x, y, z) около оси U, проходящей черезъ точку A (a, b, c) и образующей съ осями углы α, β, γ равняется проекціи на ось момента этого вектора около полюса A, т. е. по (17):

$$K^{(U)} = [Z(y-b) - Y(z-c)]\cos\alpha + [X(z-c) - Z(x-a)]\cos\beta + \\ + [Y(x-a) - X(y-b)]\cos\gamma. \qquad (20)$$

13. Новыя координаты приложеннаго вектора. Вмѣсто того, чтобы задать приложенный векторъ его проекціями на три координатныя оси и координатами точки приложенія, мы можемъ опредѣлить его другими шестью величинами: тремя проекціями на оси и тремя моментами около координатныхъ осей. Новыя координаты слѣд. будутъ: X, Y, Z, L, M, N. Число ихъ снова на единицу превышаетъ число независимыхъ координатъ вектора: ни одна изъ нихъ, очевидно, не можетъ быть неопредѣленною, слѣд. между ними должна быть нѣкоторая зависимость. Дѣйствительно, изъ выраженій (15) нетрудно видѣть, что

$$XL + YM + ZN = 0. \qquad (21)$$

Геометрически это равенство выражаетъ перпендикулярность вектора къ своему моменту около начала координатъ.

Отъ прежней системы координатъ вектора къ новой легко перейдемъ съ помощью уравненій (15). Тѣ же уравненія служатъ для обратнаго перехода, только одной изъ координатъ точки приложенія надо дать опредѣленное значеніе, выбранное по нашему произволу.

14. Взаимный моментъ двухъ векторовъ. Взаимнымъ моментомъ двухъ векторовъ называется произведеніе изъ длины одного изъ векторовъ на моментъ другого около оси, служащей основаніемъ первому и совпадающей съ нимъ по направленію. Численно взаимный моментъ равняется ушестеренному объему тетраедра, построеннаго на данныхъ векторахъ, какъ на противоположныхъ ребрахъ. Объему этому должно приписать знакъ положительный или отрицательный въ зависимости отъ знака момента, входящаго въ составъ взаимнаго момента двухъ векторовъ.

Если данные векторы (фиг. 11) AB и CD означимъ черезъ V_1 и V_2, моментъ вектора V_1 около основанія вектора V_2 черезъ G_{12}, моментъ вектора V_2 около основанія V_1 черезъ G_{21}, объемъ тетраедра, построеннаго на V_1 и V_2, черезъ W, и наконецъ для искомаго взаимнаго момента выберемъ символъ $(V_1 V_2)$, то намъ придется убѣдиться въ справедливости равенствъ:

$$(V_1 V_2) = (V_2 V_1) = V_1 G_{21} = V_2 G_{12} = \pm 6\, W. \qquad (22)$$

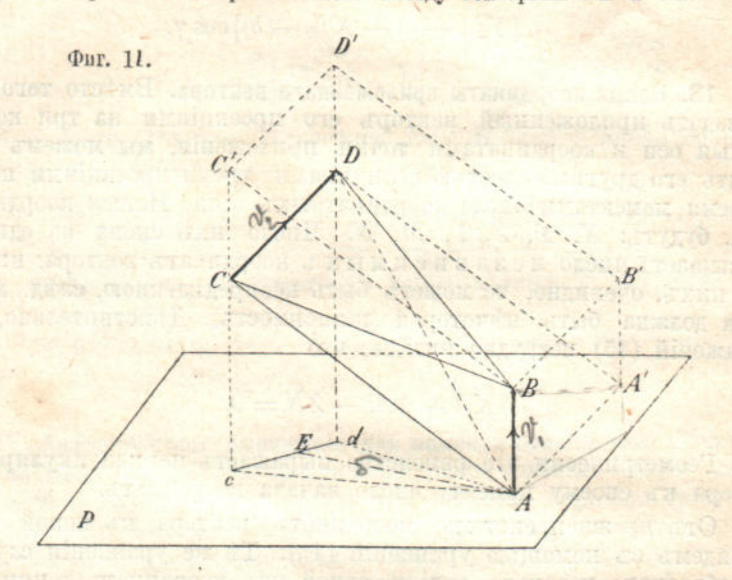
Вычислимъ сначала моментъ G_{21}. Если плоскость P перпендикулярна къ AB и проходитъ черезъ A, то искомый моментъ равняется удвоенной

площади треугольника Acd, гдѣ cd проекція CD на плоскость P. Но

$$2. \text{ Плош. } \Delta \ Acd = cd \,.\, AE = cd \,.\, \delta;$$

здѣсь $AE = \delta$ перпендикуляръ, опущенный изъ A на cd; эта линія, очевидно, служитъ кратчайшимъ разстояніемъ между векторами AB и CD.

Фиг. 11.



Далѣе $cd = CD \,.\, \sin \omega$, гдѣ ω уголъ между направленіями векторовъ CD и AB; слѣд. по принятымъ обозначеніямъ

$$V_1 G_{21} = \pm V_1 V_2 \delta \sin (V_1 V_2).$$

Произведеніе $V_1 V_2 \sin (V_1 V_2)$ представляетъ собою площадь параллелограмма $ABA'B'$, если AA' параллельно CD. Построимъ на этомъ параллелограммѣ, какъ на основаніи, параллелепипедъ, имѣющій боковымъ ребромъ прямую AC; тогда отрѣзокъ δ будетъ служить высотою этого параллелепипеда. А потому

$$V_1 G_{21} = \pm V_1 V_2 \delta \sin (V_1 V_2) = \pm 6 \ W;$$

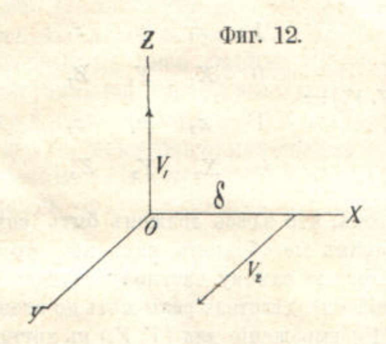
такъ какъ тетраедръ, построенный на векторахъ, очевидно, составляетъ шестую часть вышеупомянутаго параллелепипеда. Выраженіе $V_1 V_2 \delta \sin (V_1 V_2)$ симметрично относительно V_1 и V_2; отсюда заключаемъ о равенствѣ:

$$V_1 G_{21} = \pm V_2 G_{12}.$$

Для опредѣленія знака разсмотримъ частный случай. Пусть (фиг. 12) векторъ V_1 имѣетъ точку приложенія въ началѣ координатъ и направленъ по Oz, а векторъ V_2 имѣетъ точку приложенія на положительной половинѣ

Ox въ разстояніи δ отъ начала и направленъ по Oy; тогда $V_1 G_{21} = + V_1 V_2 \delta$ и $V_2 G_{12} = + V_1 V_2 \delta$; слѣд., въ вышеприведенной формулѣ надо сохранить по-

Фиг. 12.



ложительный знакъ. Такимъ образомъ равенства (22) доказаны во всѣхъ своихъ частяхъ.

15. Аналитическое выраженіе для взаимнаго момента векторовъ. Изъ аналитической геометріи намъ извѣстно такое выраженіе для объема W тетраедра, имѣющаго свои вершины въ точкахъ: ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2; ξ_3, η_3, ζ_3; ξ_4, η_4, ζ_4; —

$$6W = \pm \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ 1 & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix}$$

Пусть (фиг. 11) векторы V_1 или AB, V_2 или CD, взаимный моментъ которыхъ желательно вычислить, заданы своими координатами: X_1, Y_1, Z_1, x_1, y_1, z_1; X_2, Y_2, Z_2, x_2, y_2, z_2. Тогда координаты вершинъ тетраедра $ABCD$, построеннаго на этихъ векторахъ, будутъ слѣдующія:

$$A: \xi_1 = x_1;\quad \eta_1 = y_1;\quad \zeta_1 = z_1;$$

$$B: \xi_2 = x_1 + X_1;\quad \eta_2 = y_1 + Y_1;\quad \zeta_2 = z_1 + Z_1;$$

$$C: \xi_3 = x_2;\quad \eta_3 = y_2;\quad \zeta_3 = z_2;$$

$$D: \xi_4 = x_2 + X_2;\quad \eta_4 = y_2 + Y_2;\quad \zeta_4 = z_2 + Z_2.$$

Подставляя эти значенія въ предъидущее выраженіе, найдемъ

$$6W = \pm \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_1 + X_1 & y_1 + Y_1 & z_1 + Z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_2 + X_2 & y_2 + Y_2 & z_2 + Z_2 \end{vmatrix}.$$

Вычитая изъ второй строки опредѣлителя первую, а изъ четвертой третью, значительно упростимъ его и такимъ образомъ по § 14 получимъ окончательно:

$$(23)\qquad (V_1 V_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

Убѣдиться въ томъ, что здѣсь долженъ быть сохраненъ знакъ плюсъ, можно совершенно такимъ же образомъ, какъ мы это сдѣлали въ § 14, примѣняя формулу къ тому же самому частному случаю.

Если предъидущій опредѣлитель разложить по элементамъ перваго столбца, то получимъ по (15) выраженіе для $(V_1 V_2)$ въ другихъ координатахъ векторовъ:

$$X_1,\ Y_1,\ Z_1,\ L_1,\ M_1,\ N_1;\ X_2,\ Y_2,\ Z_2,\ L_2,\ M_2,\ N_2;\ —$$

$$(24)\qquad (V_1 V_2) = X_1 L_2 + Y_1 M_2 + Z_1 N_2 + X_2 L_1 + Y_2 M_1 + Z_2 N_1.$$

Система векторовъ.

16. Система векторовъ. Главный векторъ. Координаты системы. Группу n векторовъ $V_1, V_2, \ldots V_n$, если разсматриваемъ ихъ всѣхъ одновременно, будемъ называть системою векторовъ. Векторъ V, представляющій собою геометрическую сумму данныхъ векторовъ, носитъ названіе главнаго вектора системы. Координаты главнаго вектора X, Y, Z, связанныя съ координатами отдѣльныхъ векторовъ равенствами (7), называются координатами системы; эти величины характеризуютъ собою систему. Системы, имѣющія одинаковыя координаты, т. е. имѣющія геометрически равные главные векторы, сами считаются геометрически равными. Изъ опредѣленія операціи геометрическаго сложенія вытекаетъ, что главный векторъ не зависитъ вовсе отъ положенія осей координатъ.

Система приложенныхъ векторовъ.

17. Система приложенныхъ векторовъ. Главный моментъ. Координаты системы. Группа изъ n приложенныхъ векторовъ $V_1, V_2, \ldots V_n$, если всѣ векторы разсматриваются одновременно, называется системою приложенныхъ векторовъ. Такъ какъ каждый приложенный векторъ V_i характеризуется двумя неприложенными векторами: X_i, Y_i, Z_i и L_i, M_i, N_i, (см. § 13), то система приложенныхъ векторовъ равносильна двумъ системамъ

неприложенныхъ векторовъ. Поэтому система приложенныхъ векторовъ характеризуется не однимъ, а двумя главными векторами: главнымъ векторомъ R для системы X_i, Y_i, Z_i ($i=1, 2, .. n$) и главнымъ векторомъ G^0 для системы L_i, M_i, N_i ($i=1, 2, \ldots n$). Первый векторъ сохраняетъ свое названіе **главнаго вектора системы**, а второй называется **главнымъ моментомъ системы около начала координатъ**. Координаты: X, Y, Z; L, M, N,—этихъ двухъ векторовъ называются **координатами системы приложенныхъ векторовъ**. По (7) и (15) координаты системы такъ зависятъ отъ координатъ отдѣльныхъ векторовъ:

$$X=\sum_{i=1}^{n} X_i;\quad Y=\sum_{i=1}^{n} Y_i;\quad Z=\sum_{i=1}^{n} Z_i;$$

$$L=\sum_{i=1}^{n} L_i=\sum_{i=1}^{n}(Z_i y_i-Y_i z_i);$$

$$M=\sum_{i=1}^{n} M_i=\sum_{i=1}^{n}(X_i z_i-Z_i x_i);$$

$$N=\sum_{i=1}^{n} N_i=\sum_{i=1}^{n}(Y_i x_i-X_i y_i). \qquad (25)$$

18. Зависимость координатъ системы отъ выбора полюса.

Если вмѣсто начала координатъ возьмемъ за полюсъ точку A (a, b, c), то главный векторъ R останется безъ измѣненія (см. § 16), а главный моментъ около новаго полюса $G^{(A)}$ ($L^{(A)}$, $M^{(A)}$, $N^{(A)}$), вообще говоря, не будетъ равняться прежнему G^0 (L, M, N), такъ какъ сами суммируемые моменты G_i^0 (L_i, M_i, N_i) измѣнятся и обратятся въ $G_i^{(A)}$ ($L_i^{(A)}$, $M_i^{(A)}$, $N_i^{(A)}$).

Дѣйствительно, по (17):

$$L_i^{(A)}=Z_i y_i-Y_i z_i+Y_i c-Z_i b=L_i-Z_i b+Y_i c;\quad M_i^{(A)}=M_i-X_i c+Z_i a;$$

$$N_i^{(A)}=N_i-Y_i a+X_i b.$$

А потому

$$L^{(A)}=\sum_{i=1}^{n} L_i^{(A)}=\sum_{i=1}^{n} L_i-b\sum_{i=1}^{n} Z_i+c\sum_{i=1}^{n} Y_i=L-bZ+cY;$$

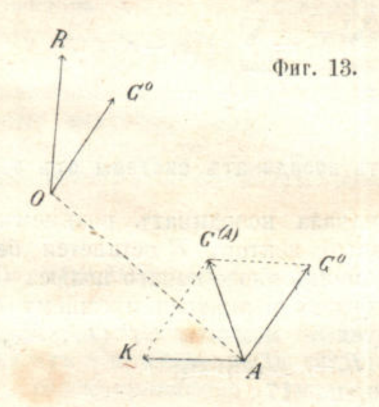
$$(26)\qquad M^{(A)}=M-cX+aZ;\quad N^{(A)}=N-aY+bX.$$

Двучлены, стоящіе въ правыхъ частяхъ равенствъ: $-bZ+cY$, $-cX+aZ$, $-aY+bX$, очевидно, представляютъ собою моменты около осей координатъ вектора: X, Y, Z, $-a$, $-b$, $-c$. Если же мы замѣтимъ, что по отношенію къ системѣ осей параллельныхъ прежнимъ, но имѣющихъ начало въ точкѣ A, координаты прежняго начала будутъ именно $-a$, $-b$, $-c$, то легко увидимъ, что разсматриваемые двучлены служатъ координатами момента K главнаго вектора R, приложеннаго къ началу координатъ, около точки A. Такимъ образомъ, выше написанныя три алгебраическихъ равенства приводятъ къ такому геометрическому:

$$(G^{(A)})=(G^{0})+(K);$$

т. е. главный моментъ около новаго полюса равняется геометрической суммѣ главнаго момента около прежняго полюса и момента главнаго вектора системы, приложеннаго къ прежнему полюсу, относительно новаго.

Пусть, напр., (фиг. 13) G^0 главный моментъ системы около



Фиг. 13.

O, R главный векторъ системы, K моментъ вектора R, приложеннаго къ O, относительно A; тогда главный моментъ системы $G^{(A)}$ около A будетъ діагональю параллелограмма, построеннаго на векторахъ G^0 и K.

Изъ доказаннаго соотношенія вытекаетъ, что геометрическимъ мѣстомъ полюсовъ съ геометрически равными моментами служитъ прямая, параллельная главному вектору системы.

Если первоначально полюсомъ служила не точка O (начало координатъ), а точка A (a, b, c) и затѣмъ за полюсъ взята P (x, y, z), то по (26), перенеся начало въ A, мы нашли бы такія выраженія для главнаго момента въ P:

$$\begin{aligned} L^{(P)} &= L^{(A)} + Y(z-c) - Z(y-b); \\ M^{(P)} &= M^{(A)} + Z(x-a) - X(z-c); \\ N^{(P)} &= N^{(A)} + X(y-b) - Y(x-a). \end{aligned} \tag{27}$$

19. Инваріанты системы векторовъ. Разложимъ (§ 5) главный моментъ $G^{(A)}$ системы приложенныхъ векторовъ около какого либо полюса A на два составляющихъ—по направленію главнаго вектора R и по направленію перпендикулярному къ главному вектору. Первый составляющій векторъ назовемъ $H^{(A)}$, второй $P^{(A)}$. Составимъ выраженіе для $H^{(A)}$, пользуясь равенствами (26).

$$H^{(A)} = G^{(A)} \cos(G^{(A)} R) = \frac{1}{R}(L^{(A)} X + M^{(A)} Y + N^{(A)} Z) =$$

$$= \frac{1}{R}(LX + MY + NZ) = G^0 \cos(G^0 R) = H;$$

Въ полученное выраженіе вовсе не входятъ координаты точки A, поэтому для другого какого-нибудь полюса B мы нашли бы точно такое же выраженіе, слѣд.:

$$H^{(A)} = H^{(B)} = H;$$

т. е. проекція главнаго момента системы на направленіе главнаго вектора не зависитъ отъ положенія полюса.

Такъ какъ и на главный векторъ не вліяетъ выборъ полюса, то выраженіе

$$RH^{(A)} = RH = XL + YM + ZN \tag{28}$$

не зависитъ ни отъ положенія полюса, ни, конечно, отъ оріентировки координатныхъ осей; поэтому оно носитъ названіе инваріанта системы векторовъ. Другимъ инваріантомъ является выраженіе

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

какъ мы уже упоминали выше (§ 16).

20. Центральная ось системы векторовъ. Перемѣна полюса вліяетъ лишь на составляющій векторъ главнаго момента $P^{(A)}$, перпендикулярный къ главному вектору. Посмотримъ, нельзя ли выбрать полюсъ такъ, чтобы этотъ векторъ $P^{(A)}$ обратился въ нуль. Тогда, очевидно, главный моментъ $G^{(A)}$ около взятаго полюса будетъ имѣть наименьшую возможную величину H и по направленію совпадетъ съ основаніемъ вектора H. т. е. съ главнымъ векторомъ

Пусть (фиг. 14) для полюса A построенъ главный векторъ R и главный моментъ $G^{(A)}$; разложимъ этотъ моментъ на два вектора: $H^{(A)}$ по направленію R и $P^{(A)}$ по направленію къ R перпендикулярному. Затѣмъ отступимъ отъ плоскости, содержащей векторы R и $G^{(A)}$, по перпендикуляру AC къ ней на разстояніе $AC = d = \frac{P^{(A)}}{R}$, при томъ въ такую сторону, чтобы для наблюдателя, смотрящаго на плоскость изъ точки C и стоящаго такъ, что направленіе R совпадаетъ съ направленіемъ отъ ногъ къ головѣ, векторъ $P^{(A)}$ казался идущимъ слѣва направо. Тогда точка C и будетъ искомый полюсъ. Дѣйствительно, по предъидущему, главный моментъ $G^{(C)}$

Фиг. 14.

для полюса C получится какъ сумма момента $G^{(A)}$ и момента K вектора R около полюса C. Этотъ моментъ по своей величинѣ равняется Rd, т. е., по условію, равняется $P^{(A)}$, но по направленію прямопротивоположенъ; слѣд. геометрическая сумма $G^{(A)}$ и K дастъ только векторъ $H^{(C)} = H^{(A)} = H$; поэтому

$$G^{(C)} = H,$$

что и желали получить.

Полюсовъ подобныхъ C безчисленное множество; всѣ они лежатъ (§ 18) на прямой $C'C''$, параллельной главному вектору. Прямая эта носитъ названіе *центральной оси* системы векторовъ.

21. Уравненіе центральной оси. Полученный въ предъидущемъ параграфѣ результатъ подтвердимъ аналитическимъ путемъ.

Станемъ искать координаты полюса (a, b, c) изъ того условія, чтобы для него главный моментъ системы имѣлъ возможно наименьшую величину. По (26) вопросъ сводится къ опредѣленію минимума функціи отъ трехъ перемѣнныхъ a, b и c:

$$[G^{(A)}]^2 = (L - Zb + Yc)^2 + (M - Xc + Za)^2 + (N - Ya + Xb)^2.$$

По извѣстнымъ правиламъ приравниваемъ нулю производныя по a, b и c:

$$Z(M - Xc + Za) - Y(N - Ya + Xb) = 0;$$

$$X(N - Ya + Xb) - Z(L - Zb + Yc) = 0;$$

$$Y(L - Zb + Yc) - X(M - Xc + Za) = 0.$$

Одного взгляда на эти уравненія достаточно, чтобы видѣть, что одно изъ нихъ служитъ слѣдствіемъ остальныхъ двухъ. Замѣняя ихъ равенствомъ такихъ отношеній:

$$\frac{L - Zb + Yc}{X} = \frac{M - Xc + Za}{Y} = \frac{N - Ya + Xb}{Z},$$

по (26) видимъ, что

$$\frac{L^{(A)}}{X} = \frac{M^{(A)}}{Y} = \frac{N^{(A)}}{Z},$$

т. е. направленіе главнаго момента около искомаго полюса совпадаетъ съ направленіемъ главнаго вектора. Равенство двухъ послѣднихъ отношеній приводитъ къ уравненію:

$$ZM - YN = X(Zc + Yb) - a(Z^2 + Y^2);$$

или, если $X^2 + Y^2 + Z^2$ замѣнимъ черезъ R^2, къ такому выраженію:

$$a - \frac{1}{R^2}(YN - ZM) = \frac{X}{R^2}(Xa + Yb + Zc).$$

Подобнымъ образомъ найдемъ:

$$b - \frac{1}{R^2}(ZL - XN) = \frac{Y}{R^2}(Xa + Yb + Zc);$$

$$c - \frac{1}{R^2}(XM - YL) = \frac{Z}{R^2}(Xa + Yb + Zc).$$

Изъ этихъ равенствъ, полагая

$$\alpha = \frac{1}{R^2}(YN - ZM); \quad \beta = \frac{1}{R^2}(ZL - XN); \quad \gamma = \frac{1}{R^2}(XM - YL);$$

получаемъ искомое уравненіе центральной оси:

$$\frac{a-\alpha}{X} = \frac{b-\beta}{Y} = \frac{c-\gamma}{Z}. \tag{29}$$

Это прямая, параллельная главному вектору и проходящая черезъ точку (α, β, γ). Легко убѣдиться, что точка ($\alpha\beta\gamma$) именно та самая C, о которой была рѣчь въ предъидущемъ параграфѣ. Дѣйствительно, радіусъ векторъ этой точки перпендикуляренъ къ R и G^0, такъ какъ

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0; \quad \alpha L + \beta M + \gamma N = 0.$$

Далѣе длина λ радіуса вектора находится изъ равенства

$$\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{1}{R^4}\left\{(L^2 + M^2 + N^2)R^2 - (XL + YM + ZN)^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{R^4} R^2 (G^0)^2 \sin^2(RG^0),$$

откуда по § 20

$$\lambda = \frac{1}{R} G^0 \sin(RG^0) = d.$$

Точно также и направленіе этого радіуса вектора совпадаетъ съ указаннымъ въ томъ же параграфѣ. Пусть положительное направленіе Oz совпадаетъ съ G^0, а плоскость zOy проходитъ черезъ R, такъ что $L = 0$, $M = 0$, $N > 0$; $X = 0$, $Y > 0$. Тогда $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\alpha = \frac{YN}{R} > 0$, т. е. радіусъ векторъ, совпадаетъ съ положительною половиною Ox, что и подтверждаетъ вышесказанное.

22. Распредѣленіе главныхъ моментовъ въ пространствѣ. На основаніи предъидущаго мы можемъ составить себѣ ясное представленіе о томъ, какъ расположены въ пространствѣ моменты около различныхъ полюсовъ.

Величина момента $G^{(A)}$ вокругъ точки A, отстоящей отъ центральной оси на разстояніи d, по §§ 18 и 20 представится такъ:

$$G^{(A)} = \sqrt{H^2 + d^2 R^2}\,;$$

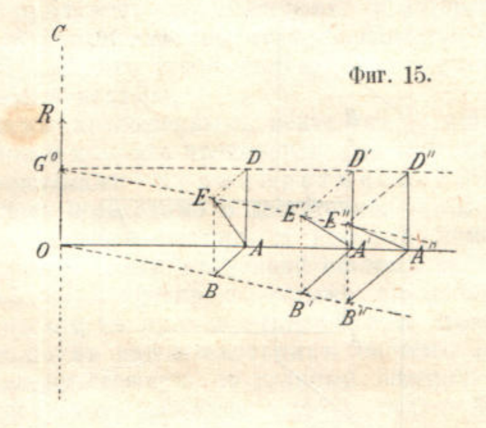
слѣд. геометрическимъ мѣстомъ полюсовъ, для которыхъ моменты равны по своей величинѣ, но могутъ отличаться по направленію, служитъ цилиндръ вращенія, ось коего совпадаетъ съ центральною осью системы. Каждая изъ производящихъ этого цилиндра служитъ геометрическимъ мѣстомъ полюсовъ съ геометрически равными моментами. Моменты вокругъ полюсовъ, лежащихъ на ортогональномъ сѣченіи цилиндра, расположены по производящимъ однополаго гиперболоида вращенія. Окружность, представляющая собою это ортогональное сѣченіе, служитъ горломъ гиперболоида.

Тангенсъ угла φ, подъ которымъ направленіе момента $G^{(A)}$ наклонено къ центральной оси, выражается такъ:

$$tg\,\varphi = \frac{Rd}{H}\,,$$

слѣд. моментъ по мѣрѣ удаленія полюса отъ оси стремится стать перпендикулярнымъ къ оси.

Въ заключеніе разсмотримъ, какъ мѣняется направленіе моментовъ для полюсовъ, лежащихъ на прямой, перпендикулярной къ центральной оси въ данной на ней точкѣ. Пусть OC (фиг. 15)



Фиг. 15.

центральная ось системы, R и G^0 главный векторъ и главный моментъ для точекъ на этой оси и пусть прямая OA перпендикулярна къ OC. Моментъ $G^{(A)}$ около A выразится діагональю AE прямоугольника $ABED$, у котораго сторона AD геометрически равна

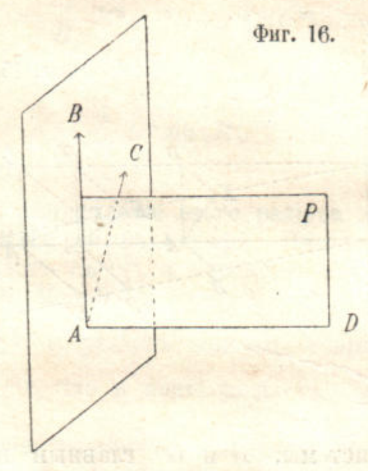
G^0, а сторона $AB = R.OA$; плоскость прямоугольника перпендикулярна къ OA. Для другой точки A' на той же прямой OA должны также найти діагональ прямоугольника $E'D'A'B'$, причемъ $(A'D') = (G^0)$; $A'B' = R.OA'$. Очевидно,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OA'};$$

слѣд. линія OBB', а потому и G^0EE' прямыя. Изъ сказаннаго вытекаетъ, что направленія моментовъ совпадаютъ съ производящими гиперболическаго параболоида, построеннаго на OA и G^0E.

До сихъ поръ мы предполагали, что ни главный векторъ, ни главный моментъ для точекъ центральной оси не равняются нулю. Если главный векторъ нуль, то для всѣхъ полюсовъ моменты геометрически равны. Если главный моментъ для точекъ на оси обращается въ нуль, то всѣ моменты перпендикулярны къ оси, т. е. φ всюду равно $\frac{\pi}{2}$

23. Построеніе Понселе. Мы умѣемъ найти положеніе центральной оси, если система векторовъ намъ задана своими координатами. Но, конечно, это не единственный способъ заданія—такихъ способовъ безчисленное множество, наприм. система будетъ вполнѣ опредѣлена, если извѣстны три главныхъ момента ея около трехъ данныхъ точекъ. Моменты эти не могутъ быть заданы произвольно, какъ увидимъ дальше. Мы разсмотримъ изящный геометрическій пріемъ, данный Понселе, для отысканія въ этомъ случаѣ центральной оси.



Фиг. 16.

Предварительно замѣтимъ, что, если извѣстны направленія главнаго вектора AB (фиг. 16) и главнаго момента AC для какого нибудь полюса A, то легко найти плоскость, въ которой должна лежать центральная ось.

По § 20 искомая линія параллельна главному вектору и встрѣчаетъ перпендикуляръ AD, возстановленный въ A къ плоскости CAB, слѣд. лежитъ въ плоскости P, проходящей черезъ AB и перпендикулярной къ плоскости CAB. Теперь задачу нашу легко рѣшить. Направленіе главнаго вектора характеризуется тѣмъ, что проекція на него любого момента имѣетъ постоянную величину; слѣд., если изъ произвольной точки, какъ вершины, построимъ тетраедръ съ боковыми ребрами геометрически равными тремъ даннымъ моментамъ, то высота этого тетраедра, опущенная изъ той же вершины, и дастъ искомое направленіе. Затѣмъ по сказанному выше для двухъ данныхъ полюсовъ строимъ двѣ плоскости, содержащія центральную ось: пересѣченіе ихъ и будетъ искомая линія. Отсюда и видно, что мы не имѣемъ права задать всѣ три момента по произволу: плоскость, полученная тѣмъ же пріемомъ для третьяго даннаго полюса, должна съ первыми двумя плоскостями пересѣчься по одной прямой.

Системы эквивалентныя.

24. Системы приложенныхъ векторовъ эквивалентныя между собою. Системы прямопротивоположныя. Системы эквивалентныя нулю. Двѣ системы приложенныхъ векторовъ называются эквивалентными между собою, если онѣ имѣютъ геометрически равные главный векторъ и главный моментъ для любого полюса. Для этого необходимо и достаточно (§ 18), чтобы у нихъ оказались равными главный векторъ и главный моментъ для одного только полюса.

Система приложенныхъ векторовъ, у которой главный векторъ и главный моментъ равны нулю, называется эквивалентною нулю. Примѣромъ такой системы могутъ служить два прямопротивоположныхъ вектора.

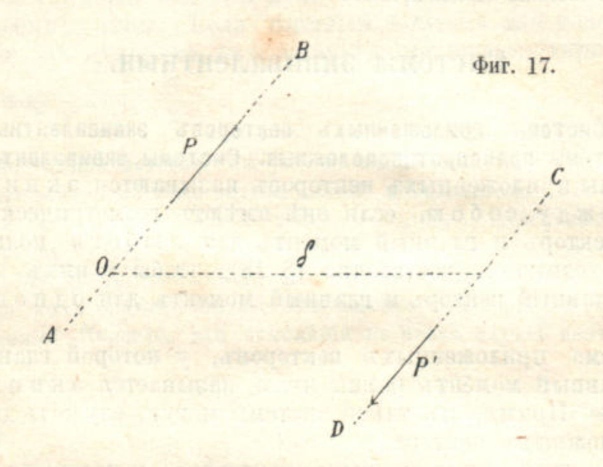
Двѣ системы приложенныхъ векторовъ, у которыхъ главный векторъ и главный моментъ противоположны для любого полюса, называются системами прямопротивоположными другъ другу. Для этого необходимо и достаточно, чтобы такимъ свойствомъ обладали главный векторъ и главный моментъ для одного какого либо полюса. Если въ данной системѣ векторовъ всѣ векторы замѣнимъ прямопротивоположными, то, очевидно, новая система векторовъ будетъ прямопротивоположна прежней.

Если изъ двухъ или нѣсколькихъ системъ векторовъ составимъ одну систему сложную, то главный векторъ и главный моментъ сложной системы для какого нибудь полюса будетъ равняться геометрической суммѣ главныхъ векторовъ и моментовъ отдѣльныхъ простыхъ системъ около того же полюса. Отсюда вытекаетъ, что, если къ какой либо системѣ векторовъ присоединить систему эквивалентную нулю, то новая сложная система будетъ эквивалентна прежней. Соединеніе двухъ прямопротивоположныхъ си-

стемъ дастъ систему эквивалентную нулю. Наоборотъ, если систему эквивалентную нулю раздѣлить на двѣ, то получатся двѣ прямопротивоположныя системы.

Если двѣ системы приложенныхъ векторовъ S_1 и S_2 таковы, что сложная система изъ S_1 и системы, прямопротивоположной S_2 или, наоборотъ, изъ S_2 и системы, прямопротивоположной S_1, эквивалентна нулю, то системы S_1 и S_2 эквивалентны другъ другу.

25. Простѣйшія системы приложенныхъ векторовъ. Пара векторовъ. Наиболѣе простою системою приложенныхъ векторовъ является система, состоящая только изъ одного вектора. Другая простая система получится, если мы возьмемъ два приложенныхъ вектора P и P' (фиг. 17), равныхъ по величинѣ, лежа-

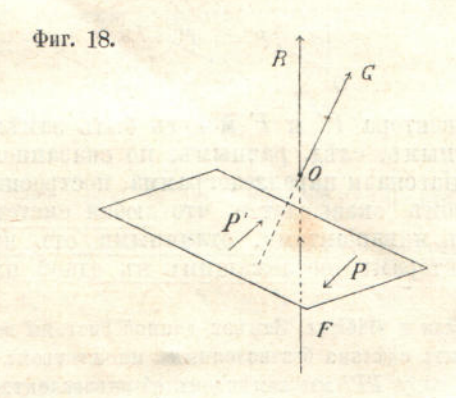


Фиг. 17.

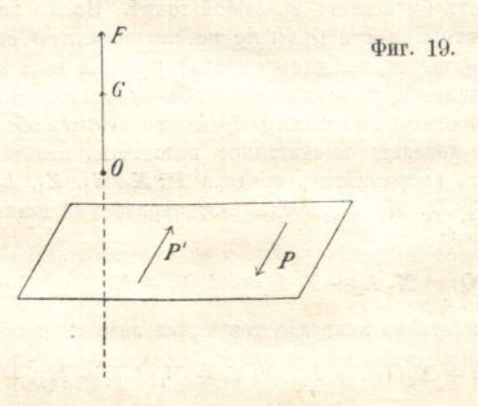
щихъ на параллельныхъ основаніяхъ AB и CD, но противоположно направленныхъ. Такая система носитъ названіе пары векторовъ. Главный векторъ для пары обращается въ нуль, а потому (§ 22) моментъ пары не зависитъ отъ положенія полюса. Если взять полюсъ O на основаніи AB одного изъ векторовъ, то непосредственно видимъ, что главный моментъ равенъ произведенію изъ общей величины векторовъ, скажемъ P, на разстояніе между основаніями δ, называемое плечомъ пары. По направленію моментъ пары перпендикуляренъ къ плоскости, содержащей данные векторы (плоскости пары), и идетъ въ ту сторону, глядя съ которой на плоскость пары, увидимъ векторы ея направленными въ сторону движенія стрѣлки часовъ. Пары, лежащія въ параллельныхъ плоскостяхъ, эквивалентны между собою, если у нихъ равны произведенія изъ длины плеча на величину вектора и направленія моментовъ одинаковы.

26. Замѣна данной системы векторовъ простѣйшею, ей эквивалентною, при инваріантахъ отличныхъ отъ нуля. Введеніе въ разсмотрѣніе эквивалентныхъ системъ даетъ намъ возможность замѣнять однѣ системы векторовъ другими болѣе простыми или болѣе удобными въ какомъ либо отношеніи. Такъ напр., система, состоящая изъ нѣсколькихъ векторовъ съ общею точкою приложенія, можетъ быть замѣнена однимъ векторомъ, равнымъ геометрической суммѣ данныхъ векторовъ и приложеннымъ къ той же точкѣ.

Фиг. 18.



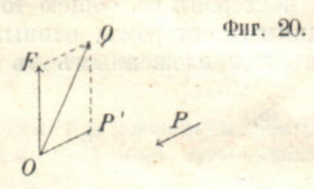
Разсмотримъ сначала общій случай замѣны данной системы простѣйшею. Пусть для взятаго полюса O (фиг. 18) данная система имѣетъ главный векторъ R и главный моментъ G. Система,



Фиг. 19.

состоящая изъ вектора $\boldsymbol{F}$, приложеннаго къ O и геометрически равнаго R, и пары PP', плоскость которой перпендикулярна къ G, а моментъ равенъ G, будетъ, очевидно, эквивалентна данной системѣ. Если полюсъ O взять на центральной оси, то плоскость пары PP' (фиг. 19) будетъ перпендикулярна къ F, и моментъ ея будетъ возможно наименьшій. Таким образомъ любая система

приложенныхъ векторовъ можетъ быть замѣнена системою, состоящею изъ трехъ векторовъ. Нетрудно уменьшить число этихъ векторовъ до двухъ. Дѣйствительно, замѣняя пару PP' ей эквивалентною, мы можемъ совмѣстить (фиг. 20) точку приложенія одного изъ векторовъ пары, напр. P', съ точкою O.



Фиг. 20.

Теперь два вектора P' и F могутъ быть замѣщены однимъ Q, имъ эквивалентнымъ, слѣд. равнымъ, по сказанному въ началѣ этого параграфа, діагонали параллелограмма, построеннаго на P' и F. Такимъ образомъ оказывается, что любая система приложенныхъ векторовъ съ инваріантами, отличными отъ нуля, эквивалентна двумъ векторамъ, не лежащимъ въ одной плоскости.

27. Теоремы Шаля и Мёбіуса. Замѣна данной системы векторовъ двумя векторами можетъ быть сдѣлана безчисленнымъ множествомъ способовъ. На самомъ дѣлѣ, когда пару PP' мы замѣняемъ ей эквивалентною, то можемъ взять произвольную длину плеча δ, лишь бы при соотвѣтственномъ измѣненіи длины вектора P произведеніе $P\delta$ сохранило свою величину; кромѣ того пара можетъ быть повернута на произвольный уголъ въ своей плоскости; наконецъ, полюсъ можетъ быть взятъ въ любой точкѣ. Но, во всякомъ случаѣ, какими бы двумя векторами P и Q мы не замѣнили данную систему, взаимный моментъ (PQ) остается величиною постоянною. А такъ какъ по § 14 взаимный моментъ равняется ушестеренному объему тетраедра, построеннаго на P и Q, какъ на противоположныхъ ребрахъ, то и этотъ объемъ остается постояннымъ. Чтобы доказать высказанное положеніе, называемое теоремою Шаля, положимъ, что координаты у вектора $P: X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1$; а у вектора $Q: X_2\ Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2$; тогда разсматриваемый взаимный моментъ по (24) выразится такъ:

$$(PQ) = X_1 L_2 + Y_1 M_2 + Z_1 N_2 + X_2 L_1 + Y_2 M_1 + Z_2 N_1 ;$$

или, если принять во вниманіе тождества вида (21):

$$(PQ) = (X_1 + X_2)(L_1 + L_2) + (Y_1 + Y_2)(M_1 + M_2) + (Z_1 + Z_2)(N_1 + N_2).$$

Но, по условію, векторы P и Q эквивалентны данной системѣ векторовъ, слѣд. координаты системы: X, Y, Z, L, M, N, такъ связаны съ координатами этихъ векторовъ:

$$X = X_1 + X_2 ;\quad Y = Y_1 + Y_2 ;\quad Z = Z_1 + Z_2 ;$$

$$L = L_1 + L_2 ;\quad M = M_1 + M_2 ;\quad N = N_1 + N_2 .$$

Отсюда вытекаетъ, что взаимный моментъ

$$(PQ) = XL + YM + ZN;$$

т. е. равняется одному изъ инваріантовъ системы, что и доказываетъ теорему.

Если данная система состоитъ изъ n векторовъ V_i съ координатами

$$X_i,\ Y_i,\ Z_i,\ L_i,\ M_i,\ N_i;\quad i = 1, 2, 3, \ldots n;$$

то можно показать, что взаимный моментъ тѣхъ двухъ векторовъ P и Q, которые эквивалентны системѣ, равняется суммѣ взаимныхъ моментовъ всѣхъ векторовъ системы; т. е.

$$(PQ) = \sum_{i,j} (V_i V_j).$$

Значки i и j различны, такъ что число членовъ суммы равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Для взаимнаго момента (PQ) мы имѣемъ по предъидущему выраженіе:

$$(PQ) = \sum_i X_i \sum_i L_i + \sum_i Y_i \sum_i M_i + \sum_i Z_i \sum_i N_i.$$

Если сократимъ всѣ члены, обращающіеся въ нуль по (21), то найдемъ:

$$(PQ) = \sum_{i,j} (X_i L_j + Y_i M_j + Z_i N_j + X_j L_i + Y_j M_i + Z_j N_i);$$

суммированіе распространено на всѣ пары различныхъ значковъ i и j. Но по (24) каждый изъ $\frac{n(n-1)}{2}$ членовъ разсматриваемой суммы можетъ быть замѣненъ черезъ $(V_i V_j)$, слѣд.

$$(PQ) = \sum_{i,j} (V_i V_j);$$

что и желали получить. Доказанная теорема носитъ названіе теоремы Мёбіуса.

28. Замѣна системы векторовъ простѣйшею при инваріантахъ равныхъ нулю. Мы видѣли, что въ общемъ случаѣ, когда инваріанты отличны отъ нуля, т. е. когда

$$X^2 + Y^2 + Z^2 > 0, \quad XL + YM + ZN \text{ не равно } 0;$$

система эквивалентна двумъ векторамъ, не лежащимъ въ одной плоскости. Теперь разсмотримъ случаи, когда какой либо изъ инваріантовъ обращается въ нуль.

Если $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$, то и второй инваріантъ становится нулемъ. Такъ какъ главный векторъ системы нуль, то система или эквивалентна нулю, или эквивалентна парѣ момента геометрически равнаго главному моменту системы, независящему въ данномъ случаѣ отъ положенія полюса.

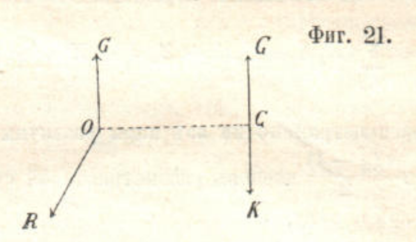
Переходимъ къ послѣднему случаю, когда

$$X^2 + Y^2 + Z^2 > 0; \quad XL + YM + ZN = 0.$$

Нетрудно видѣть, что написанныя выраженія представляютъ условія необходимыя и достаточныя для того, чтобы данная система была эквивалентна одному вектору. Если система можетъ быть замѣнена однимъ векторомъ, то для полюсовъ, лежащихъ на основаніи этого вектора, главный моментъ G системы долженъ обращаться въ нуль. А такъ какъ наименьшее возможное значеніе для главнаго момента равно проекціи его на главный векторъ, то главный моментъ G или нуль, или перпендикуляренъ къ R. По (28)

$$XL + YM + ZN = RG \cos(GR),$$

слѣд., вышеприведенныя условія необходимы, но они и достаточны. Если $G = 0$, это очевидно само собою; а если (фиг. 21)



Фиг. 21.

главный моментъ G перпендикуляренъ къ главному вектору R, то, отступивъ отъ полюса O по перпендикуляру къ плоскости ROG въ соотвѣтственную сторону (§ 20) на разстояніе $OC = \frac{G}{R}$, найдемъ полюсъ C, для котораго главный моментъ обратится въ нуль, и слѣд., система окажется дѣйствительно эквивалентной одному вектору, приложенному къ C.

29. Плоская система векторовъ. Система, у которой всѣ векторы лежатъ въ одной плоскости, называется плоскою. Главный моментъ такой системы перпендикуляренъ къ ея плоскости, а главный векторъ долженъ лежать въ самой плоскости, слѣд., по § 28 система плоская эквивалентна или одному вектору, или парѣ, или нулю.

30. Система параллельныхъ векторовъ. Центръ системы. Пусть всѣ векторы системы параллельны направленію U, характеризуемому косинусами l, m, n. Тогда координаты какого либо вектора V_i будутъ:

$$P_i l,\ P_i m,\ P_i n,\ x_i,\ y_i,\ z_i;$$

причемъ P_i будетъ положительно или отрицательно, смотря по тому, направленіе V_i идетъ ли по U, или прямо противъ U. Изъ выраженій для координатъ системы:

$$X = l\sum_i P_i;\quad Y = m\sum_i P_i;\quad Z = n\sum_i P_i;$$

$$L = \sum_i P_i(ny_i - mz_i);\quad M = \sum_i P_i(lz_i - nx_i);\quad N = \sum_i P_i(mx_i - ly_i),$$

видно, что такая система эквивалентна или нулю, или парѣ, или одному вектору, равному $\sum_i P_i$, направленному параллельно даннымъ и приложенному къ точкѣ, имѣющей своими координатами

$$x_c = \frac{\sum_i P_i x_i}{\sum_i P_i};\quad y_c = \frac{\sum_i P_i y_i}{\sum_i P_i};\quad z_c = \frac{\sum_i P_i z_i}{\sum_i P_i}. \tag{30}$$

Точка эта носитъ названіе ц е н т р а с и с т е м ы. Выраженія для координатъ центра показываютъ, что положеніе центра зависитъ лишь отъ относительной величины векторовъ и отъ положенія ихъ точекъ приложенія, но не зависитъ отъ общаго направленія векторовъ, т. е. отъ l, m, n. Такимъ образомъ, если, оставляя векторы параллельными, повернуть всѣ ихъ на одинъ и тотъ же уголъ около точекъ приложенія, то положеніе центра не измѣнится.

Точно также положеніе центра не зависитъ отъ выбора осей координатъ. Если измѣнимъ систему координатныхъ осей, то придется выраженія (30) преобразовать, пользуясь формулами аналитической геометріи:

$$\xi = a + a'x + a''y + a'''z;$$

$$\eta = b + b'x + b''y + b'''z;$$

$$\zeta = c + c'x + c''y + c'''z.$$

Тогда найдемъ:

$$\xi_c = \frac{1}{\sum_i P_i} \sum_i P_i \xi_i = a + a'x_c + a''y_c + a'''z_c \text{ и т. д.,}$$

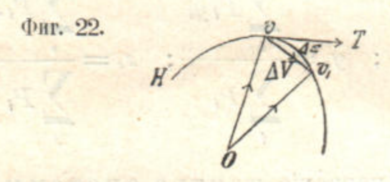
откуда и видно, что центръ мѣста своего не перемѣнилъ.

Векторъ-функціи.

31. Векторъ-функція. Годографъ. Геометрическая производная. Если величина и направленіе вектора V зависятъ отъ значеній, принимаемыхъ какими либо перемѣнными $t, u, v, w, \ldots$, то векторъ V называется векторіальной функціей этихъ перемѣнныхъ или, короче, векторъ-функціей отъ $t, u, v, w, \ldots$. Мы ограничимся здѣсь разсмотрѣніемъ векторъ-функціи только отъ одного независимаго перемѣннаго t. Координаты такого вектора представятся нѣкоторыми аналитическими функціями отъ t:

(31) $$X = f_1(t), \quad Y = f_2(t), \quad Z = f_3(t).$$

Фиг. 22.



Если изъ какого либо неизмѣннаго полюса O станемъ строить (фиг. 22) векторы Ov, Ov_1,.., геометрически равные разсматриваемому перемѣнному вектору, то геометрическимъ мѣстомъ концовъ этихъ векторовъ будетъ нѣкоторая кривая H, носящая названіе годографа вектора V. Очевидно, выраженія (31) представляютъ собою уравненія годографа, если за полюсъ взято начало координатъ.

Когда векторъ, не измѣняя своего направленія, мѣняетъ только свою длину, годографомъ служитъ отрѣзокъ прямой. Если векторъ, сохраняя постоянной свою длину, мѣняетъ только направленіе, годографъ будетъ сферическая кривая. Для постояннаго вектора годографъ обращается въ точку. Годографъ будетъ кривою плоскою, если проекція вектора на нѣкоторое неизмѣнное направленіе постоянна.

Возьмемъ два значенія независимой перемѣнной: t и t_1; причемъ пусть $t_1 > t$. Для нихъ векторъ-функція*) пусть принимаетъ значенія V и V_1 (фиг. 22). Векторъ ΔV, представляющій собою геометрическую разность V_1 и V:

$$(\Delta V) = (V_1) - (V);$$

называется **геометрическимъ приращеніемъ** векторъ-функціи V, соотвѣтствующимъ приращенію

$$\delta t = t_1 - t,$$

независимой перемѣнной t. Координаты вектора ΔV:

$$\delta X, \delta Y, \delta Z,$$

черезъ координаты векторовъ V_1 и V: X_1, Y_1, Z_1, X, Y, Z, по (11) выразятся такъ:

$$\delta X = X_1 - X; \quad \delta Y = Y_1 - Y; \quad \delta Z = Z_1 - Z.$$

Векторъ $\frac{1}{\delta t}(\Delta V)$ съ координатами

$$\frac{\delta X}{\delta t}, \frac{\delta Y}{\delta t}, \frac{\delta Z}{\delta t} \tag{32}$$

отличается отъ вектора ΔV только своею длиною. Разсмотримъ предѣлъ вектора $\frac{1}{\delta t}(\Delta V)$, взятый въ томъ предположеніи, что значеніе t_1 приближается къ t, т. е. δt приближается къ нулю. Если такой предѣльный векторъ существуетъ, то онъ носитъ названіе **геометрической производной** отъ вектора V по перемѣнной t и означается такъ $\dot{V}$**). По предъидущему (32), координатами вектора $\dot{V}$ будутъ аналитическія производныя отъ координатъ вектора V:

$$\dot{V}_x = \dot{V}\cos(\dot{V}x) = \frac{dX}{dt}; \quad \dot{V}_y = \dot{V}\cos(\dot{V}y) = \frac{dY}{dt};$$

$$\dot{V}_z = \dot{V}\cos(\dot{V}z) = \frac{dZ}{dt}. \tag{33}$$

---

*) Мы разсматриваемъ лишь функціи **однозначныя**.

**) Вводить особый символъ для означенія той перемѣнной, по которой берется производная, не представляется необходимымъ, такъ какъ мы разсматриваемъ векторъ-функціи только одной перемѣнной.

Иначе по (31), если запятыми означимъ производныя по t:

$$\dot{V}_x = f_1'(t)\,;\quad \dot{V}_y = f_2'(t)\,;\quad \dot{V}_z = f_3'(t).$$

Чтобы установить связь между геометрическою производною вектора и его годографомъ, замѣчаемъ, что (фиг. 22) приращеніе ΔV вектора служитъ хордою годографа, стягивающею дугу $\Delta\sigma$; слѣд. съ одной стороны

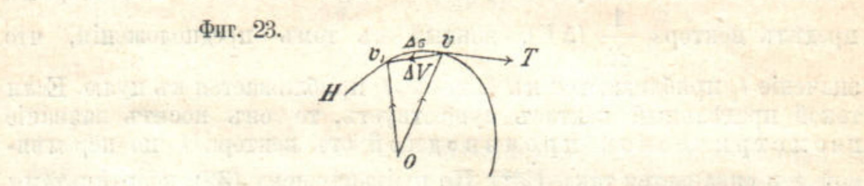
$$\text{Пред.}_{\Delta V = 0} \left\{\frac{\Delta\sigma}{\Delta V}\right\} = 1,$$

а съ другой стороны предѣльное направленіе ΔV, когда точка v_1 подходитъ къ v, совпадаетъ съ направленіемъ касательной T къ годографу въ точкѣ v. Отсюда вытекаетъ, что длина вектора $\dot{V}$ равняется численной величинѣ производной отъ дуги годографа по независимой перемѣнной:

$$\dot{V} = \text{Пред.}\left\{\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}\right\} = \frac{d\sigma}{dt}, \tag{34}$$

а направленіе $\dot{V}$ совпадаетъ съ направленіемъ касательной T къ годографу въ соотвѣтственной точкѣ; причемъ касательная должна идти въ ту сторону, въ которую перемѣщается точка v при **положительномъ** δt.

Фиг. 23.



Если бы t_1 было меньше t, т. е. $\delta t < 0$, то (фиг. 23) векторъ ΔV шелъ бы въ ту сторону, въ которую перемѣщается точка v при отрицательномъ δt *); но за то векторъ $\frac{1}{\delta t}(\Delta V)$ съ координатами (32) былъ бы по направленію противоположенъ ΔV, и слѣд.

---

*) Это направленіе всегда противоположно прежнему, если только t не представляетъ собою **особеннаго** значенія независимаго перемѣннаго, напр. такого, при которомъ векторъ-функція имѣетъ max.-min. отклоненія въ какую-либо сторону.

предѣльное направленіе его т. е. геометрической производной $\dot{V}$, совпало бы опять съ направленіемъ T касательной къ годографу въ сторону перемѣщенія точки v при положительномъ δt.

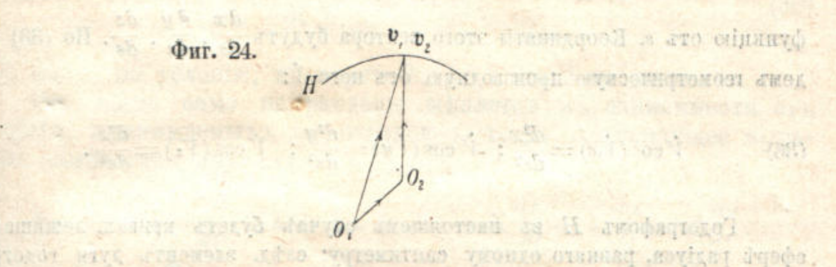
Пусть два вектора V_1 и V_2 (фиг. 24) функціи одной независимой перемѣнной t отличаются другъ отъ друга на постоянный векторъ A, т. е.

$$(V_1) = (V_2) + (A).$$

Тогда, если для вектора V_1 годографомъ служитъ кривая H при полюсѣ O_1, то та же кривая H будетъ годографомъ и для V_2, только при полюсѣ O_2, если $(O_1 O_2) = (A)$; а отсюда, по предъидущему, такъ какъ соотвѣтственныя точки v_1 и v_2 совпадаютъ, заключаемъ о равенствѣ:

$$(\dot{V}_1) = (\dot{V}_2).$$

Фиг. 24.



Разсмотрѣнный выше векторъ $\dot{V}$, въ свою очередь, является функціею отъ t; слѣд. и отъ него можетъ быть взята геометрическая производная $\ddot{V}$; координаты этого вектора будутъ:

$$\ddot{V}_x = \frac{d^2 X}{dt^2}; \quad \ddot{V}_y = \frac{d^2 Y}{dt^2}; \quad \ddot{V}_z = \frac{d^2 Z}{dt^2}. \tag{35}$$

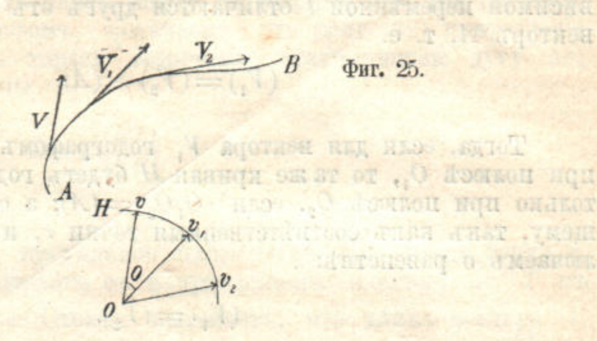
По отношенію къ вектору V векторъ $\ddot{V}$ называется геометрическою производною второго порядка. Продолжая поступать такимъ же образомъ, мы можемъ получить отъ вектора V геометрическую производную любого n—таго порядка: $\overset{(n)}{V}$, съ координатами

$$\overset{(n)}{V}_x = \frac{d^n Z}{dt^n}; \quad \overset{(n)}{V}_y = \frac{d^n Y}{dt^n}; \quad \overset{(n)}{V}_z = \frac{d^n Z}{dt^n}.$$

32. Примѣръ. Пусть нѣкоторая кривая въ пространствѣ (витая или плоская, безразлично) задана уравненіями:

$$x = \varphi_1(s); \quad y = \varphi_2(s); \quad z = \varphi_3(s);$$

гдѣ s длина дуги этой кривой, считаемая отъ какой либо точки A (фиг. 25) на ней. Станемъ въ различныхъ точкахъ кривой проводить касательныя и откладывать на нихъ въ сторону возрастанія дуги s длину равную единицѣ (одному сантиметру). Тогда мы получимъ нѣкоторый перемѣнный векторъ V,



Фиг. 25.

функцію отъ s. Координаты этого вектора будутъ $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$. По (33) найдемъ геометрическую производную отъ него $\dot{V}$:

$$(36) \qquad \dot{V}\cos(\dot{V}x) = \frac{d^2x}{ds^2}; \quad \dot{V}\cos(\dot{V}y) = \frac{d^2y}{ds^2}; \quad \dot{V}\cos(\dot{V}z) = \frac{d^2z}{ds^2}.$$

Годографомъ H въ настоящемъ случаѣ будетъ кривая, лежащая на сферѣ радіуса, равнаго одному сантиметру; слѣд. элементъ дуги годографа численно равняется θ, углу между двумя смежными радіусами векторами, или, что то же, между смежными касательными данной кривой. По (34) величина геометрической производной равняется предѣлу отношенія $\frac{\theta}{\Delta s}$, т. е. кривизнѣ данной кривой, слѣд.

$$(37) \qquad \dot{V} = \frac{1}{\rho},$$

гдѣ ρ радіусъ кривизны кривой. Касательная T къ годографу, какъ касательная къ сферѣ, перпендикулярна къ радіусу вектору точки касанія, т. е. параллельна плоскости нормальной къ данной кривой, а, какъ касательная къ конусу, имѣющему вершину въ полюсѣ, а направляющею годографъ, лежитъ въ одной плоскости со смежнымъ радіусомъ векторомъ, т. е. параллельна плоскости кривизны; слѣд. относительно данной кривой эта касательная параллельна главной нормали. Притомъ направленіе ея идетъ въ ту сторону, въ которую поварачивается касательная данной кривой, т. е. отъ кривой къ центру кривизны. Но такое направленіе обыкновенно приписывается радіусу кривизны ρ, слѣд.

$$\dot{V} \parallel \rho.$$

Отсюда по (36) и (37) получаемъ выраженія, которыми намъ придется пользоваться:

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{1}{\rho}\cos(\rho x);\quad \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{1}{\rho}\cos(\rho y);\quad \frac{d^2z}{ds^2}=\frac{1}{\rho}\cos(\rho z). \tag{38}$$

33. Проекція геометрической производной на неизмѣнное и подвижное направленіе. Индексъ или ортъ даннаго направленія. Уже изъ выраженій (33) для координатъ геометрической производной $\dot V$ ясно, что проекція ея на какое либо неизмѣнное (независящее отъ t) направленіе U, опредѣляемое косинусами λ, μ, ν съ координатными осями, должна равняться аналитической производной отъ проекціи вектора V на то же направленіе. И въ самомъ дѣлѣ

$$\dot V\cos(\dot V U)=\dot V_x\lambda+\dot V_y\mu+\dot V_z\nu=\frac{d}{dt}(X\lambda+Y\mu+Z\nu)=$$
$$=\frac{d}{dt}[V\cos(VU)], \tag{39}$$

такъ какъ, по условію, косинусы λ, μ, ν отъ t не зависятъ.

Но, когда само направленіе мѣняется въ зависимости отъ значеній, принимаемыхъ перемѣнною t, тогда предъидущее выраженіе замѣняется другимъ:

$$\dot V\cos(\dot V U)=\frac{d}{dt}(X\lambda+Y\mu+Z\nu)-X\frac{d\lambda}{dt}-Y\frac{d\mu}{dt}-Z\frac{d\nu}{dt}.$$

Замѣтимъ, что λ, μ, ν служатъ координатами перемѣннаго вектора u, имѣющаго длину равную единицѣ и совпадающаго по направленію съ U; тогда, означая геометрическую производную отъ этого вектора, называемаго **индексомъ** или **ортомъ** даннаго направленія, черезъ $\dot u$, предъидущую формулу можемъ переписать такъ:

$$\dot V\cos(\dot V u)+V\dot u\cos(V\dot u)=\frac{d}{dt}[V\cos(Vu)]. \tag{40}$$

34. Геометрическій интегралъ отъ вектора. Если операцію полученія геометрической производной отъ даннаго вектора, назовемъ геометрическимъ дифференцированіемъ, то обратную операцію, по аналогіи, должны назвать геометрическимъ интегрированіемъ, и слѣд. векторъ W, имѣющій своею геометрическою производною векторъ V съ координатами X, Y, Z, долженъ называться **геометрическимъ интеграломъ** отъ вектора V. Изъ (33) ясно, что координатами W будутъ:

$$\int X dt,\quad \int Y dt,\quad \int Z dt.$$

Отсюда заключаемъ, что векторовъ, служащихъ интеграломъ даннаго, безчисленное множество. Далѣе очевидно, что геометрическою разностью двухъ интеграловъ отъ одного и того же вектора служитъ нѣкоторый постоянный векторъ. Чтобы задача о нахожденіи интеграла стала опредѣленною, необходимо добавочное условіе. Такимъ условіемъ обыкновенно служитъ заданіе направленія и длины вектора интеграла для частнаго значенія независимаго перемѣннаго t. Заданныя величины носятъ названіе начальныхъ. Нетрудно видѣть, что геометрическій интегралъ W отъ вектора V, принимающій начальное значеніе $W_0(\Xi_0, \Upsilon_0, Z_0)$ для $t=t_0$, выразится координатами:

$$(41) \quad W_x = \Xi_0 + \int_{t_0}^{t} X dt\,; \quad W_y = \Upsilon_0 + \int_{t_0}^{t} X dt\,; \quad W_z = Z_0 + \int_{t_0}^{t} Z dt\,.$$

35. Геометрическая производная системы приложенныхъ векторовъ. Обратимся теперь къ системѣ приложенныхъ векторовъ. Пусть эта система S перемѣнная и функція одной независимой перемѣнной t; тогда шесть координатъ системы (25).

$$\begin{bmatrix} X; & Y; & Z \\ L; & M; & N \end{bmatrix}$$

будутъ аналитическими функціями той же перемѣнной. Станемъ разсматривать два значенія независимой перемѣнной: t и t_1; для нихъ координаты системы будутъ:

$$\begin{bmatrix} X; & Y; & Z \\ L; & M; & N \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} X_1; & Y_1; & Z_1 \\ L_1; & M_1; & N_1 \end{bmatrix}$$

Система ΔS съ координатами:

$$(42) \quad \begin{bmatrix} X_1 - X; & Y_1 - Y; & Z_1 - Z \\ L_1 - L; & M_1 - M; & N_1 - N \end{bmatrix},$$

должна быть соединена съ системою S $(t=t)$ въ одну для полученія системы эквивалентной системѣ S_1 $(t=t_1)$. Назовемъ систему ΔS **геометрическимъ приращеніемъ** системы S, соотвѣтствующимъ приращенію независимой перемѣнной $\delta t = t_1 - t$. Главный векторъ ΔR и главный моментъ ΔG^0 геометрическаго приращенія системы, какъ видно изъ (42), равны соотвѣтственно геометрическимъ приращеніямъ главнаго вектора R и главнаго момента G^0 данной системы.

Раздѣляя координаты системы ΔS на приращеніе независимой перемѣнной δt и переходя къ предѣлу при $\delta t = 0$,, получимъ систему $\dot{S}$ съ координатами:

$$\begin{bmatrix} \frac{dX}{dt}; & \frac{dY}{dt}; & \frac{dZ}{dt} \\ \frac{dL}{dt}; & \frac{dM}{dt}; & \frac{dN}{dt} \end{bmatrix}, \tag{43}$$

которую и назовемъ геометрической производною отъ данной системы S. Очевидно, система $\dot{S}$ имѣетъ своимъ главнымъ векторомъ и главнымъ моментомъ соотвѣтственно геометрическія производныя отъ главнаго вектора и главнаго момента данной системы.

36. Зависимость координатъ геометрической производной системы отъ полюса. Производный полюсъ. До сихъ поръ мы предполагали, что полюсомъ служитъ начало координатъ; если за полюсъ возьмемъ какую-либо точку A (a, b, c), то координатами системы $\dot{S}$ по (43) и (26) будутъ:

$$\begin{bmatrix} \frac{dX}{dt} & ; & \frac{dY}{dt} & ; & \frac{dZ}{dt} \\ \frac{dL}{dt} - b\frac{dZ}{dt} + c\frac{dY}{dt} & ; & \frac{dM}{dt} - c\frac{dX}{dt} + a\frac{dZ}{dt} & ; & \frac{dN}{dt} - a\frac{dY}{dt} + b\frac{dX}{dt} \end{bmatrix} \tag{44}$$

Сравнивая настоящія выраженія съ новыми координатами данной системы S:

$$\begin{bmatrix} X & ; & Y & ; & Z \\ L - bZ + cY & ; & M - cX + aZ & ; & N - aY + bX \end{bmatrix}; \tag{45}$$

видимъ, что главный векторъ и главный моментъ геометрической производной будутъ по прежнему соотвѣтственно равны геометрическимъ производнымъ отъ главнаго вектора и главнаго момента данной системы, если

$$\frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = \frac{dc}{dt} = 0,$$

т. е. если полюсъ A неизмѣненъ, не мѣняетъ своего положенія въ зависимости отъ значеній t.

Пусть теперь полюсъ A перемѣнный (a, b, c функціи отъ t). Назовемъ главный векторъ и главный моментъ системы S для полюса A черезъ $R^{(A)}$ и $G^{(A)}$, а соотвѣтственные векторы для системы $\dot{S}$ черезъ $\mathfrak{R}^{(A)}$ и $\mathfrak{G}^{(A)}$. По (45) и (44) для проекцій этихъ векторовъ на координатныя оси имѣемъ выраженія:

$$R_x^{(A)} = X,\ R_y^{(A)} = Y,\ R_z^{(A)} = Z;$$

(46)
$$\mathfrak{R}_x^{(A)} = \frac{dX}{dt},\ \mathfrak{R}_y^{(A)} = \frac{dY}{dt},\ \mathfrak{R}_z^{(A)} = \frac{dZ}{dt};$$

а также

$$G_x^{(A)} = L - bZ + cY,\ G_y^{(A)} = M - cX + aZ,\ G_z^{(A)} = N - aY + bX;$$

$$\mathfrak{G}_x^{(A)} = \frac{dL}{dt} - b\frac{dZ}{dt} + c\frac{dY}{dt},\ \mathfrak{G}_y^{(A)} = \frac{dM}{dt} - c\frac{dX}{dt} + a\frac{dZ}{dt},$$

(47)
$$\mathfrak{G}_z^{(A)} = \frac{dN}{dt} - a\frac{dY}{dt} + b\frac{dX}{dt}.$$

Изъ (46) вытекаетъ

$$\mathfrak{R}_x^{(A)} = \frac{d}{dt}R_x^{(A)},\ \mathfrak{R}_y^{(A)} = \frac{d}{dt}R_y^{(A)},\ \mathfrak{R}_z^{(A)} = \frac{d}{dt}R_z^{(A)},$$

или

(48)
$$(\mathfrak{R}^{(A)}) = (\dot{R}^{(A)}),$$

т. е. для перемѣннаго (подвижного) полюса главный векторъ геометрической производной равенъ геометрической производной главнаго вектора данной системы.

Но не то получится изъ равенствъ (47); разсматривая проекціи на ось х-овъ, видимъ, что

(49)
$$\mathfrak{G}_x^{(A)} = \frac{d}{dt}(L - bZ + cY) + Z\frac{db}{dt} - Y\frac{dc}{dt} = \frac{d}{dt}G_x^{(A)} + Zb' - Yc',$$

если для краткости производныя по t станемъ обозначать штрихами сверху.

Подобнымъ образомъ

$$\mathfrak{G}_y^{(A)} = \frac{d}{dt}\,G_y^{(A)} + Xc' - Za',$$

$$\mathfrak{G}_z^{(A)} = \frac{d}{dt}\,G_z^{(A)} + Ya' - Xc'. \tag{50}$$

Назовемъ точку съ координатами a', b', c' полюсомъ производнымъ отъ даннаго перемѣннаго $A\,(a,\ b,\ c)$. Тогда по (18) двучлены

$$Zb' - Yc',\ Xc' - Za',\ Ya' - Xb'$$

представятъ собою проекціи на оси момента около начала координатъ вектора

$$X,\ Y,\ Z,\ a',\ b',\ c',$$

т. е. главнаго вектора системы S, приложеннаго къ производному полюсу.

Означимъ этотъ моментъ черезъ K, т. е. пусть

$$K_x = Zb' - Yc',\quad K_y = Xc' - Za',\quad K_z = Ya' - Xb'. \tag{51}$$

Тогда равенства (49) и (50) перепишутся такъ:

$$\mathfrak{G}_x^{(A)} = \frac{d}{dt}\,G_x^{(A)} + K_x,$$

$$\mathfrak{G}_y^{(A)} = \frac{d}{dt}\,G_z^{(A)} + K_y,$$

$$\mathfrak{G}_z^{(A)} = \frac{d}{dt}\,G_z^{(A)} + K_z,$$

или короче

$$(\mathfrak{G}^{(A)}) = (\dot{G}^{(A)}) + (K), \tag{52}$$

откуда видимъ, что для полюса перемѣннаго (подвижного) главный моментъ геометрической производной равняется суммѣ геометрической производной отъ главнаго момента данной системы и момента около начала координатъ главнаго вектора той же данной системы, приложеннаго къ производному полюсу.

Когда полюсъ A неизмѣненъ (неподвиженъ), производный отъ него полюсъ совпадаетъ съ началомъ координатъ, и слѣд. добавоч-

ный моментъ K обращается въ нуль. Точно также моментъ K будетъ нулемъ, если главный векторъ $R^{(4)}$ данной системы равенъ нулю, т. е. система эквивалентна парѣ или нулю для разсматриваемаго значенія перемѣнной t. Въ общемъ случаѣ моментъ K обращается въ нуль по (51), если

$$\frac{a'}{X}=\frac{b'}{Y}=\frac{c'}{Z}, \tag{53}$$

т. е. если главный векторъ $R^{(4)}$ данной системы и радіусъ векторъ производнаго полюса параллельны.

Если вмѣсто системы приложенныхъ векторовъ мы имѣемъ только одинъ приложенный векторъ, то все сказанное выше остается въ силѣ, только слова главный векторъ и главный моментъ должны быть замѣнены словами векторъ и моментъ.

Кинематика
Механика { Динамика { Статика
Кинетика

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

Со времени Ньютона вся совокупность наукъ, занимающихся изслѣдованіемъ явленій матеріальнаго міра, называется *Натуральною Философіей*. Простѣйшее изъ этихъ явленій, безспорно, движеніе, поэтому всякое другое явленіе считается объясненнымъ, если оно сведено на движеніе. Отсюда вытекаетъ, что наука, изучающая законы движенія тѣлъ и носящая названіе *Аналитической* или *Раціональной Механики*, должна лежать въ основаніи Натуральной Философіи.

Движеніе можно изучать независимо отъ причинъ, его производящихъ. Часть Аналитической Механики, занимающаяся этимъ, называется по Амперу *Кинематикою*. Здѣсь разсматриваются пространственныя соотношенія и ихъ измѣненія, идущія параллельно съ теченіемъ времени. Другими словами Кинематика ничто иное, какъ Геометрія, въ которой независимой перемѣнной служитъ время. Движущійся объектъ въ Кинематикѣ важенъ лишь по своей формѣ и по своему положенію; это объектъ геометрическій: точка, линія, поверхность, тѣло или собраніе ихъ.

Но, если разсматривать движеніе матеріальныхъ тѣлъ, а не геометрическихъ объектовъ, то мы не можемъ отрѣшиться отъ изученія причинъ движенія, называемыхъ *силами*. Наука о силахъ, носящая названіе *Динамики*, и составляетъ другую, самую важную, часть Аналитической Механики. Динамику раздѣляютъ иногда на двѣ части: *Статику* и *Кинетику*. Въ первой говорится объ условіяхъ, при которыхъ тѣла, подверженныя дѣйствію приложенныхъ къ нимъ силъ, могутъ оставаться въ *покоѣ*; во второй опредѣляется *движеніе* матеріальныхъ тѣлъ подъ дѣйствіемъ данныхъ силъ.

Въ нашемъ изложеніи мы придерживаемся такого порядка: начинаемъ съ Кинематики, раздѣливъ ее на *Кинематику точки* и *Кинематику твердаго тѣла*; затѣмъ переходимъ

къ Динамикѣ, подраздѣляя ее также на два крупныхъ отдѣла: Динамику матеріальной точки и Динамику системы. Статику мы разсматриваемъ лишь какъ отдѣльную главу Динамики.

Болѣе мелкія подраздѣленія, равно какъ и термины здѣсь приведенные, будутъ изложены и объяснены далѣе въ соотвѣтственныхъ мѣстахъ.

КИНЕМАТИКА.

37. Единицы длины и времени. Въ Геометріи необходимо было условиться объ единицѣ длины для того, чтобы имѣть возможность выразить пространственные размѣры числами. За единицу длины обыкновенно принимается одинъ сантиметръ, т. е. сотая часть длины эталона, сдѣланнаго французскимъ механикомъ Борда (Borda) въ 1795 году и хранящагося въ Парижѣ.



Въ Кинематикѣ пространственныя соотношенія приводятся въ связь съ теченіемъ времени. Понятіе—время, какъ и понятіе—пространство, опредѣленію не подлежитъ. Время, протекшее между двумя событіями, называется промежуткомъ времени. Граница между двумя смежными промежутками времени носитъ названіе момента времени. Чтобы выразить промежутокъ времени числомъ, надо условиться объ единицѣ времени. За единицу времени берется обыкновенно секунда средняго времени, т. е. $\frac{1}{86400}$ среднихъ сутокъ, что составляетъ около $\frac{1}{86164,09}$ звѣздныхъ. Моментъ, съ котораго начинается счетъ времени, называется эпохою. Время до эпохи считается отрицательнымъ.

38. Движеніе. Сплошную совокупность (геометрическое мѣсто) какихъ либо тождественныхъ между собою геометрическихъ объектовъ условимся называть средою, а каждый отдѣльный геометрическій объектъ, входящій въ составъ совокупности, элементомъ среды. Подъ геометрическимъ объектомъ мы разумѣемъ точку, линію, поверхность, тѣло, собраніе ихъ въ конечномъ или безконечно большомъ числѣ. Напримѣръ, линейчатая поверхность представляетъ собою сплошную совокупность прямыхъ линій (ея производящихъ) или сплошную совокупность точекъ, слѣд. эта поверхность, какъ среда, можетъ имѣть своимъ элементомъ прямую или точку. Размѣры среды могутъ быть какъ конечные, такъ и безконечно большіе.

Подъ движеніемъ даннаго геометрическаго объекта въ данной средѣ разумѣется послѣдовательное съ теченіемъ времени совпаденіе этого объекта съ тождественными ему элементами

среды. Такимъ образомъ, можно говорить о движеніи лишь тогда, когда мы имѣемъ 1) то, что движется, и 2) то, въ чемъ происходитъ движеніе. Такъ движеніе прямой по линейчатой поверхности состоитъ въ послѣдовательномъ совпаденіи прямой съ производящими поверхности; движеніемъ точки по той же поверхности называется переходъ точки изъ одной точки поверхности въ другую.

Одинъ и тотъ же геометрическій объектъ можетъ двигаться одновременно въ двухъ или болѣе средахъ: точно также въ одной и той же средѣ одновременно могутъ двигаться два или болѣе объекта.

Среда, въ которой происходитъ движеніе, вообще говоря, должна имѣть по крайней мѣрѣ однимъ измѣреніемъ больше, чѣмъ движущійся объектъ; но, если то, что движется, мы разсматриваемъ, какъ сплошную совокупность геометрическихъ объектовъ съ меньшимъ числомъ измѣреній, то среда можетъ имѣть столько же измѣреній, сколько ихъ имѣетъ и самъ движущійся объектъ. Въ такомъ случаѣ движеніемъ называется послѣдовательное съ теченіемъ времени совпаденіе элементовъ одной среды (той, которая движется, или *подвижной*) съ элементами другой среды (той, въ которой происходитъ движеніе, или *неподвижной*). Такъ двѣ налагающіяся линейчатыя поверхности могутъ двигаться одна по другой, если на нихъ смотрѣть, какъ на сплошныя совокупности прямыхъ линій или точекъ.

Въ дальнѣйшемъ мы ограничимся изученіемъ движеній въ средѣ трехъ измѣреній и неограниченныхъ размѣровъ, имѣющей своимъ элементомъ точку. Когда разстоянія между точками среды не измѣняются съ теченіемъ времени, то среда носитъ названіе *неизмѣняемой* или *неизмѣнной*; въ противномъ случаѣ она называется *измѣняемою* или *деформирующеюся*. Такъ какъ за основной элементъ у насъ взята точка, то движущимися объектами будутъ точка, группа точекъ или сплошная совокупность ихъ, т. е. среда одного, двухъ или трехъ измѣреній (линія, поверхность, тѣло).

Движеніе въ средѣ деформирующейся намъ не придется разбирать, поэтому въ послѣдующемъ изложеніи терминъ „среда" безъ эпитета будетъ означать среду неизмѣнную. Иной разъ, по общепринятому обычаю, мы будемъ употреблять и выраженіе „движеніе въ пространствѣ"; слово пространство будетъ тогда означать опять неизмѣнную среду, элементомъ коей служитъ точка.

Простѣйшимъ изъ подлежащихъ нашему разсмотрѣнію движеній, несомнѣнно, служитъ движеніе одной точки. Для точки собственно слѣдовало бы разсмотрѣть и движенія ея въ средахъ одного и двухъ измѣреній (по линіи и по поверхности), но мы оставляемъ это въ сторонѣ, такъ какъ такія движенія являются частнымъ случаемъ движенія въ трехмѣрной средѣ. Обстоятельства, сопровождающія движеніе точки въ трехмѣрной средѣ, и излагаются въ *Кинематикѣ точки*.

По предъидущему, движеніемъ болѣе сложнаго, чѣмъ точка, геометрическаго объекта въ трехмѣрной средѣ называется послѣдовательное съ теченіемъ времени совпаденіе точекъ этого объекта съ точками среды. Движеніе какого либо объекта считается извѣстнымъ, если мы въ состояніи найти движеніе любой точки его въ разсматриваемой средѣ. Какими данными опредѣляется движеніе геометрическаго объекта, зависитъ отъ его состава и свойствъ. Наиболѣе просто находится движеніе одного только сплошнаго объекта и, при томъ, неизмѣннаго вида. За такой объектъ мы беремъ трехмѣрную неизмѣнную среду, иначе, неизмѣняемую систему точекъ или твердое тѣло въ кинематическомъ смыслѣ. Изложеніе обстоятельствъ движеній твердаго тѣла въ неизмѣняемой трехмѣрной средѣ и составляетъ предметъ Кинематики твердаго тѣла. Движеній болѣе простыхъ объектовъ неизмѣннаго вида: группы точекъ, находящихся на постоянномъ разстояніи другъ отъ друга, неизмѣнной линіи или поверхности мы подробно не касаемся, такъ какъ эти движенія представляютъ собою лишь частный случай движенія твердаго тѣла.

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ.

ГЛАВА I.

Конечныя уравненія движенія точки. Скорость точки.

39. Координаты точки. Точка кинематическая ничѣмъ не отличается отъ геометрической. По предъидущему, точка движется въ данной средѣ, если она въ различные моменты времени совпадаетъ съ различными точками среды. Та точка среды, съ которою въ разсматриваемый моментъ совпадаетъ движущаяся точка, называется положеніемъ точки въ средѣ. Если положеніе точки не мѣняется съ временемъ, то она находится въ покоѣ относительно среды. Мы будемъ разсматривать лишь непрерывное движеніе точки, т. е. такое, въ которомъ точка для двухъ безконечно близкихъ моментовъ времени занимаетъ два безконечно близкихъ положенія.

Конечно, чтобы говорить о движеніи точки въ средѣ, мы должны умѣть отличать точки среды одну отъ другой или, что то же, должны умѣть опредѣлять положеніе точки относительно среды. Величины, аналитически опредѣляющія положеніе точки въ средѣ, носятъ названіе координатъ точки.

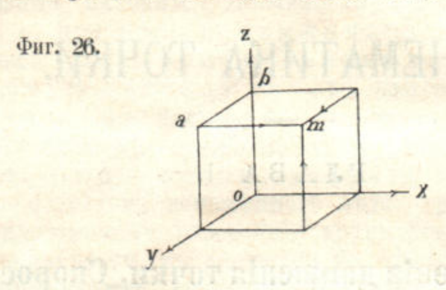
За координаты точки можно взять (фиг. 26) три разстоянія ея отъ трехъ данныхъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей xOy, yOz, zOx, называемыхъ координатными.

Координатныя плоскости своимъ пересѣченіемъ даютъ три взаимно-перпендикулярныхъ прямыхъ Ox, Oy, Oz, называемыхъ координатными осями. Точка O ихъ встрѣчи носитъ названіе начала координатъ. Каждой оси координатъ дается опредѣленное направленіе. Мы всегда будемъ предполагать, что направленія осей выбраны слѣдующимъ образомъ *): для наблюдателя,

*) Сравни прим. къ § 10.

стоящаго вдоль оси Oz такъ, чтобы направленіе ея шло отъ ногъ къ головѣ, и смотрящаго по направленію оси Ox, направленіе оси Oy идетъ отъ лѣвой руки къ правой. Въ каждой координатной плоскости различаются двѣ стороны — лицевая и изнанка. Лицевая сторона обращена туда, куда идетъ направленіе координатной оси, перпендикулярной къ разсматриваемой плоскости; такъ на фиг. 26 плоскость zOx обращена къ намъ своею лицевою стороною.

Фиг. 26.



Разстояніе точки отъ плоскости yOz означается буквою x, отъ zOx — буквою y и отъ xOy — буквою z; числа, выражающія длины этихъ разстояній, считаются положительными или отрицательными, смотря по тому, какая сторона координатной плоскости обращена къ точкѣ — лицевая или изнанка. Изложенныя координаты называются прямоугольными прямолинейными или ортогональными декартовыми.

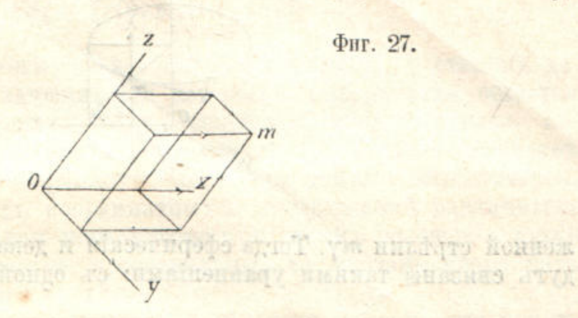
Среда, точки коей опредѣляются постоянными значеніями координатъ, очевидно, неизмѣнная; кромѣ того, оси $Oxyz$ неизмѣнно съ этою средою связаны, т. е. разстоянія всякой точки на оси или на координатной плоскости отъ любой точки среды постоянны во времени. Все вышесказанное вытекаетъ изъ принятаго нами выраженія для разстоянія ρ между какими либо двумя точками (x, y, z) и (x_1, y_1, z_1):

$$\rho^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Мы не будемъ повторять того же самаго для другихъ системъ координатъ, такъ какъ разстояніе ρ всегда функція лишь координатъ точекъ и слѣд. постоянна при постоянствѣ этихъ координатъ.

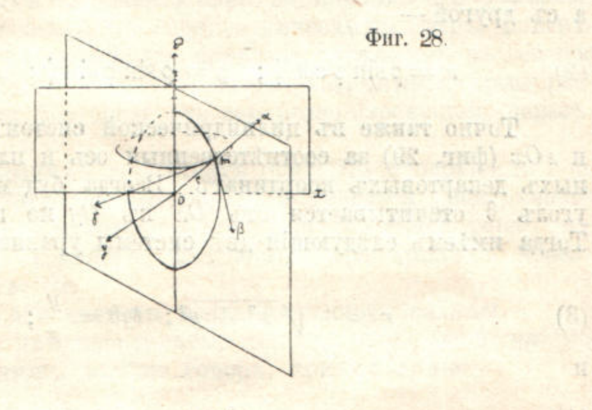
Кромѣ системы декартовыхъ ортогональныхъ координатъ существуетъ безчисленное множество другихъ. Если координатныя плоскости yOz, zOx и xOy взаимно не перпендикулярны (фиг. 27), то координатами x, y, z точки m могутъ служить отрѣзки (отъ точки m до координатныхъ плоскостей) прямыхъ, параллельныхъ осямъ координатъ. Такая система называется косоугольною прямолинейною или косоугольною декартовою.

Далѣе (фиг. 28) положеніе точки m опредѣлится длиною радіуса вектора ρ, проведеннаго изъ даннаго полюса O, **начала координатъ**, угломъ φ этого радіуса вектора съ данною **осью** OP, называемою **полярною**, и двуграннымъ угломъ ψ, который образуетъ плоскость, проходящая черезъ полярную ось и точку,



Фиг. 27.

съ данною плоскостью POx, называемою **плоскостью перваго меридіана**. Эта система координатъ носитъ названіе **сферической**.



Фиг. 28.

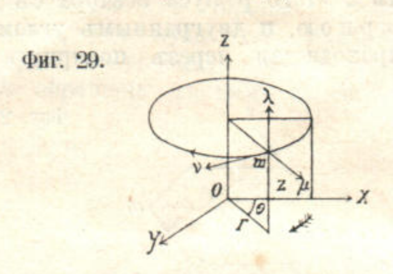
Иначе можно сказать, что въ сферической системѣ положеніе точки m опредѣляется **векторомъ** Om; тогда координаты x, y, z той же точки m для прямоугольной декартовой системы съ началомъ въ O являются (§ 3) вмѣстѣ съ тѣмъ и координатами этого вектора Om.

Или можно (фиг. 29) за координаты точки m принять разстояніе z ея отъ данной плоскости xOy, разстояніе r точки отъ данной оси Oz, перпендикулярной къ первой плоскости, и двугранный уголъ θ плоскости черезъ m и Oz съ данною плоскостью xOz. Такая система называется **цилиндрическою**.

Въ сферическихъ координатахъ прямую OP (фиг. 28) возьмемъ за Oz, а плоскость перваго меридіана за плоскость zOx прямо-

угольныхъ декартовыхъ координатъ съ началомъ въ O. Мы всегда будемъ предполагать, что уголъ ψ отсчитывается о т ъ лицевой стороны zOx к ъ лицевой сторонѣ zOy, т. е. по направленію изображенной стрѣлки $m\gamma$. Тогда сферическія и декартовы координаты будутъ связаны такими уравненіями: съ одной стороны —

Фиг. 29.



$$(1)\quad \rho = +\sqrt{x^2+y^2+z^2};\quad \cos\varphi = \frac{z}{+\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad tg\psi = \frac{y}{x};$$

а съ другой —

$$(2)\qquad x = \rho\sin\varphi\cos\psi;\quad y = \rho\sin\varphi\sin\psi;\quad z = \rho\cos\varphi.$$

Точно также въ цилиндрической системѣ возьмемъ Oz, xOy и zOx (фиг. 29) за соотвѣтственныя ось и плоскости прямоугольныхъ декартовыхъ координатъ. Всегда будемъ предполагать, что уголъ θ отсчитывается отъ Ox къ Oy по начерченной стрѣлкѣ. Тогда имѣемъ слѣдующія двѣ системы уравненій:

$$(3)\qquad r = +\sqrt{x^2+y^2};\quad tg\theta = \frac{y}{x};\quad z = z$$

и

$$(4)\qquad x = r\cos\theta;\quad y = r\sin\theta;\quad z = z.$$

Вообще за координаты точки мы можемъ принять любыя три функціи

$$(5)\qquad q_1 = f_1(x, y, z);\quad q_2 = f_2(x, y, z);\quad q_3 = f_3(x, y, z);$$

отъ декартовыхъ координатъ, если только изъ предъидущихъ трехъ уравненій мы въ состояніи опредѣлить x, y, z какъ функціи отъ q_1, q_2, q_3:

$$(6)\qquad x = \alpha(q_1, q_2, q_3);\quad y = \beta(q_1, q_2, q_3);\quad z = \gamma(q_1, q_2, q_3).$$

Другими словами, ни одно изъ уравненій (5) не должно противорѣчить другимъ и ни одно не должно быть слѣдствіемъ другихъ.

Положимъ какую либо координату, напр. q_1, равною постоянной C_1, тогда получимъ уравненіе нѣкоторой поверхности

$$q_1 = f_1(x, y, z) = C_1,$$

называемой координатною. Если постоянной C_1 станемъ давать всевозможныя значенія, для которыхъ поверхность остается дѣйствительною, то будемъ имѣть семейство координатныхъ поверхностей, соотвѣтствующихъ координатѣ q_1. Такихъ семействъ будетъ три по числу координатъ. Положеніе точки и опредѣляется, какъ пересѣченіе трехъ координатныхъ поверхностей различныхъ семействъ. Если эти три поверхности при любомъ положеніи точки ихъ пересѣченія взаимно ортогональны, то система координатъ называется ортогональною.

Для декартовыхъ координатъ названныя поверхности будутъ (фиг. 26 и 27) плоскостями параллельными основнымъ yOz, zOx и xOy.

Для сферическихъ координатъ (фиг. 28) поверхности $\rho = \text{const.}$ представляютъ собою семейство концентрическихъ сферъ; поверхности $\varphi = \text{const.}$ даютъ семейство конусовъ вращенія съ общею вершиною O и съ общею осью OP, но съ различными углами растворенія; поверхности $\psi = \text{const.}$ это семейство плоскостей, пересѣкающихся по OP.

Для цилиндрическихъ координатъ (фиг. 29) поверхности $z = \text{const.}$ даютъ семейство параллельныхъ плоскостей; поверхности $r = \text{const.}$ — семейство цилиндровъ вращенія съ общею осью; поверхность $\theta = \text{const.}$ — семейство плоскостей, проходящихъ черезъ одну и ту же прямую Oz.

Очевидно, обѣ эти системы координатъ ортогональны.

Если положить двѣ координаты, напр. q_2 и q_3, равными постояннымъ, то получимъ, вообще говоря, кривую линію:

$$q_2 = f_2(x, y, z) = C_2; \quad q_3 = f_3(x, y, z) = C_3,$$

пересѣченіе двухъ координатныхъ поверхностей различныхъ семействъ. Эта линія называется координатною, при томъ координатною, соотвѣтствующею третьей координатѣ, q_1, такъ какъ для различныхъ точекъ линіи мѣняется значеніе лишь послѣдней координаты. Положительнымъ направленіемъ координатной линіи считается то, въ которомъ значенія соотвѣтственной координаты возрастаютъ. Черезъ каждую точку пространства проходятъ три координатныя линіи; если система ортогональная, то эти линіи будутъ взаимно ортогональны.

Если хотя одна изъ координатныхъ линій кривая, система координатъ называется криволинейною.

Для декартовыхъ координатъ (фиг. 26 и 27) координатными линіями служатъ прямыя, параллельныя осямъ Ox, Oy, Oz.

Для сферическихъ координатъ (фиг. 28) координатныя линіи

$$\varphi = \text{const.}; \quad \psi = \text{const.},$$

прямыя, проходящія черезъ начало; координатныя линіи

$$\psi = \text{const.}; \quad \rho = \text{const.},$$

окружности съ центромъ въ началѣ; плоскости ихъ проходятъ черезъ OP; координатныя линіи

$$\rho = \text{const.}; \quad \varphi = \text{const.},$$

окружности, центры коихъ лежатъ на OP, а плоскости перпендикулярны къ OP.

Для цилиндрическихъ координатъ (фиг. 29) координатными линіями служатъ прямыя, параллельныя Oz ($r = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$); прямыя, перпендикулярныя къ Oz ($z = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$) и окружности съ центрами на Oz ($r = \text{const.}$, $z = \text{const.}$).

На каждой изъ координатныхъ линій стрѣлкою означено положительное направленіе.

Черезъ каждую точку среды проходятъ, какъ мы видѣли, три координатныхъ линіи; система трехъ касательныхъ, проведенныхъ въ разсматриваемой точкѣ къ этимъ линіямъ въ положительныхъ направленіяхъ, называется системою осей криволинейныхъ координатъ, соотвѣтствующею взятой точкѣ. Для декартовыхъ координатъ система осей въ любой точкѣ (фиг. 26 и 27) параллельна основнымъ Ox, Oy, Oz. Для сферическихъ (фиг. 28) и цилиндрическихъ (фиг. 29) направленія осей въ m означены буквами α, β, γ; λ, μ, ν; причемъ α соотвѣтствуетъ координатѣ ρ; $\beta - \varphi$; $\gamma - \psi$; а для цилиндрическихъ λ соотвѣтствуетъ z, $\mu - r$, $\nu - \theta$.

Если съ помощью цилиндрическихъ координатъ опредѣляется положеніе точки на плоскости xOy, т. е. если координата z постоянно равна нулю, то система координатъ называется полярною.

40. Конечныя уравненія движенія. Траекторія. Когда точка движется въ средѣ, то координаты ея q_1, q_2, q_3 не остаются постоянными, а будутъ нѣкоторыми функціями времени t:

$$(7) \qquad q_1 = f_1(t), \quad q_2 = f_2(t), \quad q_3 = f_3(t).$$

Написанныя уравненія называются **конечными уравненіями движенія точки**; заданіе ихъ вполнѣ опредѣляетъ движеніе точки. Геометрическое мѣсто точекъ среды, съ которыми движущаяся точка совпадаетъ въ различные моменты времени, носитъ названіе **пути**, описываемаго точкою въ средѣ, или **траекторіи**.

Два уравненія траекторіи:

$$\varphi_1(q_1, q_2, q_3) = 0, \quad \varphi_2(q_1 q_2, q_3) = 0,$$

получатся изъ (7) исключеніемъ времени.

Примѣры: а) Уравненіе движенія въ декартовыхъ прямоугольныхъ координатахъ:

$$x = at + \alpha; \quad y = bt + \beta; \quad z = ct + \gamma.$$

Траекторія

$$\frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b} = \frac{z-\gamma}{c},$$

прямая, проходящая черезъ точку (α, β, γ); косинусы угловъ ея съ осями пропорціональны a, b и c.

б) Уравненія движенія въ тѣхъ же координатахъ:

$$x = a \sin \alpha t \cos \alpha t; \quad y = b \sin^2 \alpha t; \quad z = c \cos \alpha t.$$

Траекторія—пересѣченіе эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

съ параболическимъ цилиндромъ:

$$\frac{y}{b} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

в) Уравненія движенія въ сферическихъ координатахъ:

$$\rho = at + \alpha; \quad \varphi = bt + \beta; \quad \psi = ct + \gamma,$$

Траекторія:

$$\frac{\rho-\alpha}{a} = \frac{\varphi-\beta}{b} = \frac{\psi-\gamma}{c}$$

Если $c = 0$, это Архимедова спираль.

г) Уравненія движенія въ цилиндрическихъ координатахъ:

$$r = at + \alpha; \quad z = bt + \beta; \quad \theta = ct + \gamma.$$

Траекторія:

$$\frac{r-\alpha}{a}=\frac{z-\beta}{b}=\frac{\theta-\gamma}{c}.$$

Если $a=0$, это винтовая линія на цилиндрѣ ($r=\alpha$); ходъ винтовой линіи равняется $\frac{b}{c}2\pi$. Если $b=0$, получается Архимедова спираль; если $c=0$, прямая.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ представляется удобнымъ задать координаты точки, какъ функціи отъ длины дуги траекторіи, s, а саму величину s задать функціею времени t, т. е.

(8) $$q_1=\varphi_1(s);\quad q_2=\varphi_2(s);\quad q_3=\varphi_3(s);\quad s=\psi(t).$$

Длина дуги траекторіи считается здѣсь отъ точки съ координатами: $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)$, $\varphi_3(0)$; при томъ положительное направленіе дуги идетъ въ ту сторону траекторіи, гдѣ лежатъ точки, для коихъ аргументъ s больше нуля.

Какимъ образомъ уравненія (7) замѣнить (8), увидимъ впослѣдствіи; возможность же такой замѣны ясна само собою.

Примѣромъ для (8) могутъ служить уравненія движенія точки по окружности радіуса R:

$$x=R\cos\frac{s}{R};\ y=R\sin\frac{s}{R};\quad z=0;\quad s=a+bt+ct^2.$$

Исключая s получимъ траекторію.

41. Перемѣщеніе точки. Скорость точки. Радіусъ векторъ движущейся точки, проведенный изъ какого либо неподвижнаго полюса (напр. начала координатъ) измѣняется съ теченіемъ времени по величинѣ и по направленію, т. е. онъ (§ 31) векторъ-функція времени. Въ такомъ случаѣ траекторія точки служитъ годографомъ этого вектора. Хорда траекторіи mm', соединяющая два положенія точки для моментовъ t и t' и называемая перемѣщеніемъ точки за промежутокъ времени $t'-t$, представляютъ собою геометрическое приращеніе радіуса вектора, соотвѣтствующее приращенію времени $t'-t$. Предѣлъ отношенія перемѣщенія къ соотвѣтственному промежутку времени въ томъ предположеніи, что t' приближается къ t, или, что то же, геометрическая производная по времени отъ радіуса вектора точки называется скоростью точки въ моментъ t. Координатами радіуса вектора ρ (§ 39) служатъ декартовы координаты x, y, z движущейся точки, слѣд. координатами скорости v будутъ:

(9) $$v\cos(vx)=\frac{dx}{dt};\quad v\cos(vy)=\frac{dy}{dt};\quad v\cos(vz)=\frac{dz}{dt}.$$ ⊗

⊗ Такъ к. x, y, z есть проекціи радіуса век[тора] на координатныя оси

Векторъ v направленъ (§ 31) по касательной къ траекторіи и при томъ въ ту сторону, въ которую происходитъ движеніе. По численной величинѣ скорость равняется производной по времени отъ длины дуги s траекторіи;

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{10}$$

Когда векторъ v постояненъ по направленію, траекторія — прямая линія; когда скорость постоянна по величинѣ, движеніе называется равномѣрнымъ. Изъ (10) при $v = \text{const.} = a$ вытекаетъ:

$$s = at + s_0,$$

гдѣ s_0 длина дуги, соотвѣтствующая положенію точки для момента $t = 0$. Отсюда выводимъ:

$$v = \frac{s - s_0}{t},$$

т. е. для равномѣрнаго движенія скорость численно равняется длинѣ дуги траекторіи, проходимой точкою въ единицу времени.

Скорость, какъ производная по времени отъ радіуса вектора, представляетъ собою величину, неоднородную съ радіусомъ векторомъ, т. е. длиною. Единица скорости сложная: ея размѣры зависятъ отъ выбора единицы длины и единицы времени. Для принятыхъ нами единицъ длины и времени единица скорости выразится символомъ:

$$\frac{\text{сантиметръ}}{\text{секунда средн. врем.}}, \tag{11}$$

т. е. словами, за единицу скорости принимается скорость—„сантиметръ въ секунду средняго времени“. Въ движеніи равномѣрномъ точка съ такою скоростью проходитъ въ единицу времени единицу длины, т. е. въ секунду средняго времени одинъ сантиметръ. Символъ (11) указываетъ, какъ размѣры единицы скорости мѣняются въ зависимости отъ размѣровъ единицъ длины и времени, а именно величина единицы скорости прямопропорціональна величинѣ единицѣ длины и обратнопропорціональна величинѣ единицы времени. Такъ скорость — „метръ въ секунду“ въ 100 разъ больше, скорость „миллиметръ въ секунду“ въ 10 разъ меньше принятой нами единицы, а скорость—„сантиметръ въ минуту“ составляетъ $\frac{1}{60}$ этой единицы.

Примѣры. а) Уравненія движенія: $x = at + \alpha$; $y = bt + \beta$; $z = ct + \gamma$.

$$v\cos(vx) = a; \quad v\cos(vy) = b; \quad v\cos(vz) = c.$$

Движеніе прямолинейное и равномѣрное со скоростью

$$v = + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

б) Уравненія движенія въ плоскости $z = 0$: $x = a \cos \omega t$, $y = a \sin \omega t$.

$$v \cos (vx) = - a\omega \sin \omega t; \quad v \cos (vy) = a\omega \cos \omega t.$$

Движеніе равномѣрное по окружности со скоростью $v = a\omega$.

в) Уравненія движенія: $x = a \sin \alpha t \cos \beta t$; $y = a \sin \alpha t \sin \beta t$; $z = a \cos \alpha t$.

$$v \cos (vx) = a\alpha \cos \alpha t \cos \beta t - a\beta \sin \alpha t \sin \beta t;$$

$$v \cos (vy) = a\alpha \cos \alpha t \sin \beta t + a\beta \sin \alpha t \cos \beta t;$$

$$v \cos (vz) = - a\alpha \sin \alpha t.$$

$$v = + a \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin^2 \alpha t}.$$

42. Проекція скорости точки на неподвижное и подвижное направленія. Станемъ разсматривать проекцію m_x движущейся точки m на ось x—овъ; эта проекція одновременно съ точкою m будетъ двигаться въ той же средѣ. Координата x представляетъ собою длину дуги траекторіи точки m_x, если за начало дуги взять начало координатъ; слѣд. производная $\frac{dx}{dt}$ можетъ быть разсматриваема, какъ скорость точки m_x. А потому равенства (9) говорятъ, что проекція скорости точки на координатную ось равняется скорости проекціи этой точки на ту же ось.

То же справедливо и для проекціи скорости на любое неподвижное направленіе U, такъ какъ изъ § 33 для проекціи скорости на неподвижное направленіе U имѣемъ такое выраженіе:

$$v \cos (vU) = \frac{d}{dt} [\rho \cos (\rho U)]; \tag{12}$$

а $\rho \cos (\rho U)$ и будетъ длина дуги прямолинейной траекторіи точки, если за начало дугъ взять проекцію начала координатъ на U.

Если направленіе U подвижное, то, по (40) того же § 33 найдемъ:

$$v \cos (vU) = \frac{d}{dt} [\rho \cos (\rho U)] - \rho \dot{u} \cos (\rho \dot{u}). \tag{13}$$

Геометрическая производная по времени $\dot{u}$ здѣсь будетъ скоростью конца индекса или орта подвижнаго направленія U. Траек-

торіей этой точки, очевидно, служитъ нѣкоторая сферическая кривая, а потому всегда

$$\dot{u} \perp U, \tag{14}$$

такъ какъ касательная къ сферѣ перпендикулярна къ радіусу точки касанія. Скорость $\dot{u}$ будемъ называть поворотною скоростью направленія U.

Примѣръ: Уравненія движенія точки:

$$x = a \sin \alpha t \cos \beta t; \quad y = a \sin \alpha t \sin \beta t; \quad z = a \cos \alpha t.$$

Подвижное направленіе U опредѣляется косинусами съ осями координатъ:

$$\lambda = \sin p \cos \beta t; \quad \mu = \sin p \sin \beta t; \quad \nu = \cos p;$$

гдѣ p нѣкоторая постоянная.

Тогда

$$\rho \cos (\rho U) = x\lambda + y\mu + z\nu = a \cos (\alpha t - p);$$

$$\dot{u} \cos (\dot{u}, x) = \frac{d\lambda}{dt} = - \beta \sin p \sin \beta t; \quad \dot{u} \cos (\dot{u}, y) = \frac{d\mu}{dt} = \beta \sin p \cos \beta t;$$

$$\dot{u} \cos (\dot{u}, z) = \frac{d\nu}{dt} = 0.$$

$$\rho\, \dot{u} \cos (\rho, \dot{u}) = x \frac{d\lambda}{dt} + y \frac{d\mu}{dt} + z \frac{d\nu}{dt} = 0.$$

А потому

$$v \cos (vU) = - a\alpha \sin (\alpha t - p).$$

43. Проекціи скорости на оси криволинейныхъ координатъ. Положимъ, что положеніе точки опредѣляется не декартовыми координатами x, y, z, а криволинейными q_1, q_2, q_3 Составимъ выраженія для проекцій скорости на оси этихъ координатъ (§ 39). Прежде всего посмотримъ, какой видъ приметъ выраженіе для половины квадрата скорости точки. Эту величину для сокращенія назовемъ черезъ h.

$$2h = v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = x'^2 + y'^2 + z'^2. \tag{15}$$

Штрихами означены производныя по времени. Изъ (7) мы получаемъ:

$$x' = \frac{\partial x}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x}{\partial q_2} q_2' + \frac{\partial x}{\partial q_3} q_3';$$

$$y' = \frac{\partial y}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial y}{\partial q_2} q_2' + \frac{\partial y}{\partial q_3} q_3';$$

$$(16) \qquad z' = \frac{\partial z}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial z}{\partial q_2} q_2' + \frac{\partial z}{\partial q_3} q_3'.$$

Условимся, какъ сдѣлано здѣсь, означать частныя производныя круглыми буквами; а полныя производныя прямыми. Замѣтимъ, что, если разсматривать x', y', z' какъ функціи шести аргументовъ q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3', то легко видѣть, что

$$(17) \qquad \frac{\partial x'}{\partial q_i'} = \frac{\partial x}{\partial q_i}; \quad \frac{\partial y'}{\partial q_i'} = \frac{\partial y}{\partial q_i}; \quad \frac{\partial z'}{\partial q_i'} = \frac{\partial z}{\partial q_i}; \; i = 1, 2, 3.$$

Первое изъ этихъ равенствъ можно написать такъ:

$$\frac{\partial \frac{dx}{dt}}{\partial \frac{dq_i}{dt}} = \frac{\partial \frac{d}{dt} x}{\partial \frac{d}{dt} q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i},$$

откуда выводимъ такое мнемоническое правило для вышенаписанныхъ равенствъ (17): символъ $\frac{d}{dt}$ сокращается, какъ множитель.

Подставляя изъ (16) въ (15), получимъ:

$$(18) \quad 2h = A_1^2 q_1'^2 + A_2^2 q_2'^2 + A_3^2 q_3'^2 + 2B_{23} q_2' q_3' + 2B_{31} q_3' q_1' + 2B_{12} q_1' q_2'.$$

гдѣ

$$A_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2;$$

$$(19) \qquad B_{ij} = \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q};$$

причемъ $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$; i и j различны.

Координатную линію: $q_2 = \text{const.}$, $q_3 = \text{const.}$, и соотвѣтствующую ей ось означимъ цифрою 1, остальныя двѣ цифрами 2 и 3.

Косинусы угловъ осей съ координатными декартовыми осями Ox, Oy и Oz означимъ по нижеслѣдующей схемѣ:

	1	2	3
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

Когда, по истеченіи времени dt, движущаяся точка пройдетъ разстояніе $ds = vdt$, она перейдетъ съ координатной поверхности q_1 на поверхность $q_1 + dq_1 = q_1 + q_1' dt$, слѣд. точка пересѣченія координатной поверхности q_1 съ координатной линіей 1 пройдетъ по этой линіи нѣкоторое разстояніе, которое назовемъ $d\sigma_1$. Не трудно видѣть, что проекція $d\sigma_1$ на Ox равняется частному дифференціалу $(dx)_1$ координаты x, соотвѣтствующему перемѣнной q_1, такъ какъ при движеніи по координатной линіи 1 остальныя двѣ координаты остаются постоянными. Слѣд., по принятымъ обозначеніямъ:

$$d\sigma_1 \cos(d\sigma_1, x) = \alpha_1 d\sigma_1 = (dx)_1 = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 .$$

Подобнымъ образомъ:

$$d\sigma_1 \cos(d\sigma_1, y) = \beta_1 d\sigma_1 = (dy)_1 = \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 ;$$

$$d\sigma_1 \cos(d\sigma_1, z) = \gamma_1 d\sigma_1 = (dz)_1 = \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1 .$$

Возвышая полученныя выраженія въ квадратъ, складывая и извлекая корень квадратный, найдемъ

$$d\sigma_1 = A_1 dq_1 , \tag{20}$$

гдѣ $A_1 = +\sqrt{A_1^2}$, если направленіе $d\sigma_1$ беремъ по соотвѣтственной оси, т. е. въ ту сторону по линіи 1, въ которую координата q_1 возрастаетъ. Пользуясь (20) изъ предъидущихъ выраженій, получимъ:

$$\alpha_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial x}{\partial q_1}; \quad \beta_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial y}{\partial q_1}; \quad \gamma_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial z}{\partial q_1}. \tag{21}$$

Совершенно такимъ же способомъ находимъ:

$$d\sigma_2 = A_2\, dq_2;\quad d\sigma_3 = A_3\, dq_3;$$

и

$$\alpha_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial x}{\partial q_2};\ \beta_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial y}{\partial q_2};\ \gamma_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial z}{\partial q_2};$$

(21′) $$\alpha_3 = \frac{1}{A_3}\frac{\partial x}{\partial q_3};\ \beta_3 = \frac{1}{A_3}\frac{\partial y}{\partial q_3};\ \gamma_3 = \frac{1}{A_3}\frac{\partial z}{\partial q_3}.$$

Полученныя выраженія даютъ возможность представить формулу (18) подъ такимъ видомъ:

(22) $$2h\,dt^2 = ds^2 = d\sigma_1{}^2 + d\sigma_2{}^2 + d\sigma_3{}^2 + 2d\sigma_2\, d\sigma_3 \cos(23) + 2d\sigma_3\, d\sigma_1 \cos(31) + 2\, d\sigma_1\, d\sigma_2 \cos(12).$$

Здѣсь для сокращенія положено:

$$\cos(23) = \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = \cos(d\sigma_2\, d\sigma_3);$$

$$\cos(31) = \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = \cos(d\sigma_3\, d\sigma_1);$$

$$\cos(12) = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = \cos(d\sigma_1\, d\sigma_2).$$

Послѣ этихъ предварительныхъ замѣчаній, приступимъ къ вычисленію проекцій скорости на оси; начнемъ съ оси 1.

$$v\cos(v\,1) = x'\alpha_1 + y'\beta_1 + z'\gamma_1,$$

или по (21), (17) и (15):

$$v\cos(v\,1) = \frac{1}{A_1}\left(x'\frac{\partial x}{\partial q_1} + y'\frac{\partial y}{\partial q_1} + z'\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) =$$

(23) $$= \frac{1}{A_1}\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q_1'} + y'\frac{\partial y'}{\partial q_1'} + z'\frac{\partial z'}{\partial q_1'}\right) = \frac{1}{A_1}\frac{\partial h}{\partial q_1'}.$$

Такимъ же путемъ найдемъ:

(23′) $$v\cos(v\,2) = \frac{1}{A_2}\frac{\partial h}{\partial q_2'};\ v\cos(v3) = \frac{1}{A_3}\frac{\partial h}{\partial q_3'}.$$

Для сферическихъ координатъ выраженіе h будетъ:

$$2h = \rho'^2 + \rho^2 \varphi'^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi \, \psi'^2 ;$$

слѣд., полагая $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \psi$, имѣемъ $A_1 = 1$, $A_2 = \rho$, $A_3 = \rho \sin \varphi$, $B_{23} = B_{31} = B_{12} = 0$. А потому при обозначеніяхъ § 39

$$v \cos (v\, \alpha) = \frac{d\rho}{dt}; \quad v \cos (v\, \beta) = \rho \frac{d\varphi}{dt}; \quad v \cos (v\, \gamma) = \rho \sin \varphi \frac{d\psi}{dt}. \qquad (24)$$

Для цилиндрическихъ координатъ

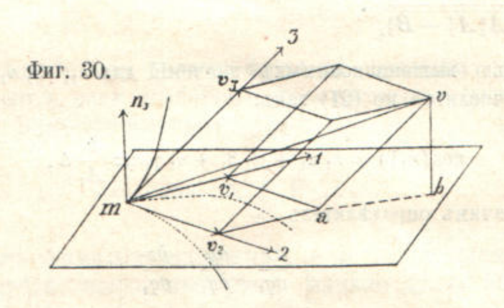
$$2h = z'^2 + r'^2 + r^2 \theta'^2,$$

откуда

$$v \cos (v\, \lambda) = \frac{dz}{dt}; \quad v \cos (v\, \mu) = \frac{dr}{dt}; \quad v \cos (v\, \nu) = r \frac{d\theta}{dt}. \qquad (25)$$

44. Составляющія скорости по осямъ криволинейныхъ координатъ. Разложимъ векторъ, изображающій скорость v точки, на три составляющіе по осямъ 1, 2, 3. По § 5 эти составляющіе векторы будутъ ребрами параллелепипеда, діагональю коего служитъ v.

Фиг. 30.



Пусть (фиг. 30) векторъ v изображаетъ скорость точки m, векторы v_1, v_2, v_3 — искомые составляющіе. Плоскость mv_1v_2 служитъ касательною плоскостью къ координатной поверхности q_3 въ точкѣ m. Если изъ конца вектора v опустимъ на эту плоскость перпендикуляръ vb, то онъ будетъ параллеленъ нормали n_3 къ поверхности q_3 въ точкѣ m. Построенный векторъ bv, очевидно, представляетъ собою проекцію скорости v на нормаль n_3. Когда мы будемъ знать эту проекцію, то длина вектора av или, что то же, v_3, найдется, если bv раздѣлить на $\cos \varphi$, т. е. косинусъ угла между осью 3 и нормалью n_3. Такимъ же путемъ можемъ опредѣлить и другіе составляющіе.

Означимъ косинусы угловъ нормалей къ координатнымъ поверхностямъ съ координатными осями такою схемою:

	n_1	n_2	n_3
x	λ_1	λ_2	λ_3
y	μ_1	μ_2	μ_3
z	ν_1	ν_2	ν_3

Нормаль n_1 перпендикулярна къ 2 и 3, слѣд., по (21):

$$\lambda_1 \frac{\partial x}{\partial q_2} + \mu_1 \frac{\partial y}{\partial q_2} + \nu_1 \frac{\partial z}{\partial q_2} = 0;$$

$$\lambda_1 \frac{\partial x}{\partial q_2} + \mu_1 \frac{\partial y}{\partial q_2} + \nu_2 \frac{\partial z}{\partial q_2} = 0.$$

Изъ этихъ уравненій легко находимъ:

$$\frac{\lambda_1}{\frac{\partial y}{\partial q_2}\frac{\partial z}{\partial q_3} - \frac{\partial z}{\partial q_2}\frac{\partial y}{\partial q_3}} = \frac{\mu_1}{\frac{\partial z}{\partial q_2}\frac{\partial x}{\partial q_3} - \frac{\partial z}{\partial q_3}\frac{\partial x}{\partial q_2}} = \frac{\nu_1}{\frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{\partial y}{\partial q_3} - \frac{\partial x}{\partial q_3}\frac{\partial y}{\partial q_2}} = k.$$

Здѣсь k — коеффиціентъ пропорціональности равный, какъ нетрудно убѣдиться, $\pm \frac{1}{\sqrt{A_2^2 A_3^2 - B_{23}^2}}$.

Съ помощью вышенаписанныхъ значеній для λ_1, μ_1, ν_1 косинусъ угла между 1 и n_1 вычислится по (21) такъ:

$$\cos(n_1 1) = \lambda_1 \alpha_1 + \mu_1 \beta_1 + \nu_1 \gamma_1 = \frac{k}{A_1} \Delta,$$

если чрезъ Δ означимъ опредѣлитель

$$\Delta = \sum \mp \frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_3} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial (x\, y\, z)}{\partial (q_1 q_2 q_3)}.$$

Проекція скорости v на n_1 окажется такою:

$$v \cos(v\, n_1) = x'\lambda_1 + y'\mu_1 + z'\nu_1 = k\Delta q_1',$$

если подставимъ предъидущія выраженія вмѣсто λ_1, μ_1, ν_1, а вмѣсто x', y', z' ихъ выраженія изъ (16); коеффиціенты у q_2' и q_3' обращаются въ нуль, какъ опредѣлители съ равными строками.

Теперь непосредственно находимъ.

$$v_1 = \frac{v\cos(v\,n_1)}{\cos(n_1\,1)} = A_1 q_1' \tag{26}$$

или по (20):

$$v_1 = \frac{d\sigma_1}{dt}.$$

Подобнымъ образомъ:

$$v_2 = A_2 q_2' = \frac{d\sigma_2}{dt}; \quad v_3 = A_3 q_3' = \frac{d\sigma_3}{dt}. \tag{26'}$$

Видъ функціи h въ формулѣ (22) ясно показываетъ, что v дѣйствительно діагональ параллелепипеда съ ребрами $\frac{d\sigma_1}{dt}$, $\frac{d\sigma_2}{dt}$, $\frac{d\sigma_3}{dt}$ по 1, 2 и 3.

Когда система координатъ ортогональная, выраженія (26) и (23) сливаются.

45. Преобразованіе уравненій движенія точки къ спеціальному виду. Если мы пожелаемъ привести уравненія движенія (7) къ спеціальному виду (8), то поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Изъ (15) мы имѣемъ:

$$ds = \pm\sqrt{2h}\,dt,$$

гдѣ h вполнѣ извѣстная намъ функція времени (18). Двойной знакъ опредѣлится, если выберемъ положительное направленіе дугъ по траекторіи. Взявши квадратуру

$$s = \text{const.} \pm \int \sqrt{2h}\,dt,$$

найдемъ s, какъ функцію времени: $s = \psi(t)$. Произвольная постоянная опредѣлится, когда выберемъ начало дугъ. Если за начало примемъ точку $f_1(t_0)$, $f_2(t_0)$, $f_3(t_0)$, то

$$s = \psi(t) = \pm \int_{t_0}^{t} \sqrt{2h}\,dt.$$

Исключивъ съ помощью этого добавочнаго уравненія время изъ (7), и получимъ искомую группу (8).

46. Опредѣленіе движенія точки по данной скорости. Погонная линія. Въ предъидущемъ мы видѣли, какъ находится скорость по

данному движенію; теперь скажемъ нѣсколько словъ объ обратномъ вопросѣ: какъ опредѣлить движеніе, если задана скорость.

Разсмотримъ сначала простѣйшій случай, когда скорость задана какъ векторъ-функція времени, т. е. когда даны

$$v\cos(vx) = \frac{dx}{dt} = f_1(t); \quad v\cos(vy) = \frac{dy}{dt} = f_2(t);$$

$$v\cos(vz) = \frac{dz}{dt} = f_3(t).$$

Искомое движеніе опредѣлится, если мы найдемъ радіусъ векторъ движущейся точки какъ векторъ-функцію времени, т. е. найдемъ геометрическій интегралъ отъ скорости. По § 34 получаемъ

$$x = \int f_1(t)\,dt; \quad y = \int f_2(t)\,dt; \quad z = \int f_3(t)\,dt.$$

Задача наша неопредѣленная: существуетъ безчисленное множество движеній, удовлетворяющихъ заданнымъ условіямъ. Если какое либо значеніе неопредѣленнаго интеграла $\int f_i(t)\,dt$ означимъ $\Phi_i(t)$ для $i = 1, 2, 3$, то одно изъ искомыхъ движеній, положимъ для точки m (x, y, z), опредѣлится уравненіями:

$$x = C + \Phi_1(t); \quad y = C' + \Phi_2(t); \quad z = C'' + \Phi_3(t),$$

гдѣ C, C', C'' нѣкоторыя постоянныя. Другое движеніе для какой либо другой точки m_1 (x_1, y_1, z_1) отличалось бы значеніями постоянныхъ:

$$x_1 = C_1 + \Phi_1(t); \quad y_1 = C_1' + \Phi_2(t); \quad z_1 = C_1'' + \Phi_3(t).$$

Вычитая почленно полученныя уравненія, находимъ:

$$x_1 - x = C_1 - C; \quad y_1 - y = C_1' - C'; \quad z_1 - z = C_1'' - C''.$$

Эти равенства говорятъ, что векторъ mm_1, соединяющій одновременныя положенія точекъ m и m_1, постояненъ по величинѣ и по направленію; слѣд. во всѣхъ искомыхъ движеніяхъ точки описываютъ тождественныя траекторіи, и всѣ траекторіи получаются изъ одной какой нибудь, если каждой точкѣ послѣдней дать одно и то же перемѣщеніе. Такъ для разсмотрѣнныхъ нами двухъ траекторій перемѣщеніе это равняется

$$\sqrt{(C_1 - C)^2 + (C_1' - C')^2 + (C_1'' - C'')^2}.$$

Задача станетъ вполнѣ опредѣленною, если мы дадимъ **начальное** положеніе точки, т. е. координаты ея x_0, y_0, z_0 для момента t_0. Тогда уравненія движенія примутъ видъ:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} f_1(t)\,dt\,;\quad y = y_0 + \int_{t_0}^{t} f_2(t)\,dt\,;\quad z = z_0 + \int_{t_0}^{t} f_3(t)\,dt\,.$$

Примѣръ: Скорость задана своими проекціями:

$$\frac{dx}{dt} = a\sin\alpha t\cos\beta t;\quad \frac{dy}{dt} = b\sin\alpha t\sin\beta t;\quad \frac{dz}{dt} = c\cos\alpha t.$$

Для момента $t = 0$ точка въ началѣ координатъ.

Искомыя уравненія движенія:

$$x = \frac{a\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{a}{2}\frac{\cos(\alpha+\beta)t}{\alpha+\beta} - \frac{a}{2}\frac{\cos(\alpha-\beta)t}{\alpha-\beta};$$

$$y = \frac{b}{2}\frac{\sin(\alpha-\beta)t}{\alpha-\beta} - \frac{b}{2}\frac{\sin(\alpha+\beta)t}{\alpha+\beta};$$

$$z = c\,\frac{\sin\alpha t}{\alpha}.$$

Въ болѣе сложныхъ случаяхъ проекціи скорости могутъ быть заданы какъ функціи не только времени, но и координатъ точки; кромѣ того, координаты точки могутъ быть и криволинейныя. Тогда, вообще говоря, мы будемъ имѣть три уравненія, связывающихъ три неизвѣстныхъ функціи времени q_1, q_2, q_3:

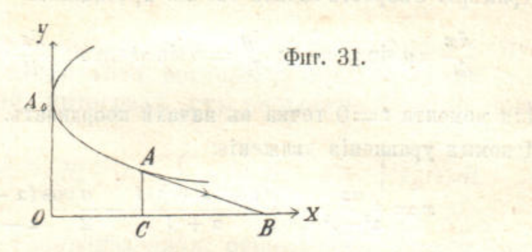
$$f_1(q_1', q_2', q_3', q_1, q_2, q_3, t) = 0;\quad f_2(q_1', q_2', q_3', q_1, q_2, q_3, t) = 0;$$

$$f_3(q_1', q_2', q_3', q_1, q_2, q_3, t) = 0.$$

Вопросъ сводится къ интегрированію такой системы трехъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка. Три интеграла системы будутъ заключать въ себѣ три произвольныя постоянныя. Для опредѣленности рѣшенія опять нужно задать еще добавочныя условія, напр. начальное положеніе точки для момента $t = t_0$.

Къ такому типу относятся задачи о такъ называемыхъ **погонныхъ** линіяхъ или линіяхъ **бѣгства**. Мы разсмотримъ, для примѣра, простѣйшую изъ нихъ: опредѣлить траекторію точки A, движущейся въ плоскости съ постоянною скоростью v, если скорость этой точки всегда направлена въ точку B, равномѣрно со скоростью u движущуюся по прямой въ той же плоскости.

Примемъ (фиг. 31) траекторію точки B за Ox и направленіе u за положительное направленіе этой оси. Замѣтимъ, что когда точка B была на безконечности въ отрицательномъ направленіи Ox, скорость точки A должна была быть параллельна этому отрицательному направленію; когда точка B уйдетъ въ положительномъ направленіи на безконечность, скорость точки A станетъ параллельною положительному направленію; слѣд. для нѣкотораго промежуточнаго момента точка A должна занимать такое положеніе A_0, для котораго скорость ея перпендикулярна къ Ox. Касательную къ искомой траекторіи въ этой точкѣ A_0 и примемъ за Oy.



Фиг. 31.

Въ тотъ моментъ, когда A находилась въ A_0, по условію задачи, B должна была быть въ O; слѣд. если A и B изображаютъ одновременныя положенія точекъ и если время считать съ того момента, когда A была въ A_0, то по равномѣрности обоихъ движеній:

$$\frac{A_0 A}{v} = \frac{OB}{u} = t.$$

Изъ $\Delta\ ABC$ легко видѣть, что

$$v\cos(vx) = \frac{dx}{dt} = v\,\frac{CB}{AB} = v\,\frac{ut - x}{AB};$$

$$v\cos(vy) = \frac{dy}{dt} = -v\,\frac{AC}{AB} = -v\,\frac{y}{AB}.$$

Раздѣляя почленно эти равенства, найдемъ:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-ut + x}{y}.$$

Исключимъ t изъ этого уравненія и обозначимъ $A_0 A$ черезъ s, а отношеніе скоростей $\frac{u}{v}$ черезъ ε, тогда получимъ:

$$x - y\,\frac{dx}{dy} = \varepsilon s.$$

Продифференцируемъ, принявъ за независимую перемѣнную y:

$$\varepsilon \frac{ds}{dy} = -y \frac{d^2x}{dy^2}. \qquad (27)$$

За начало у насъ взята точка A_0 и положительное направленіе для дугъ идетъ отъ A_0 къ A; ясно, что съ увеличеніемъ s координата y уменьшается, слѣд. по (15) при $dz = 0$:

$$\frac{ds}{dy} = -\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}.$$

Пользуясь этимъ равенствомъ, вмѣсто (27) получимъ уравненіе:

$$\varepsilon \frac{dy}{y} = \frac{\frac{d^2x}{dy^2} dy}{\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}}.$$

Интегрируя его, найдемъ:

$$\varepsilon \log y + C = \log \left\{ \frac{dx}{dy} + \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} \right\}.$$

Пусть разстояніе $OA_0 = a$; тогда произвольная постоянная C легко найдется, если замѣтимъ, что для $A_0 : y = a$, $\frac{dx}{dy} = 0$; а потому предъидущее равенство даетъ:

$$\left(\frac{y}{a}\right)^{\varepsilon} = \frac{dx}{dy} + \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}.$$

Приравнивая другъ другу обратныя величины, найдемъ

$$\left(\frac{y}{a}\right)^{-\varepsilon} = \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} - \frac{dx}{dy}.$$

Изъ этихъ двухъ уравненій слѣдуетъ, съ одной стороны

$$2 \frac{dx}{dy} = \left(\frac{y}{a}\right)^{\varepsilon} - \left(\frac{y}{a}\right)^{-\varepsilon};$$

а съ другой

$$2\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} = \left(\frac{y}{a}\right)^{\varepsilon} + \left(\frac{y}{a}\right)^{-\varepsilon}. \qquad (28)$$

Первое уравненіе тотчасъ же интегрируется; если ε не равно единицѣ, то найдемъ:

$$2x + C_1 = \frac{y^{\varepsilon+1}}{a^{\varepsilon}(\varepsilon + 1)} - \frac{y^{1-\varepsilon}}{a^{-\varepsilon}(1-\varepsilon)},$$

а если $\varepsilon = 1$, то получимъ:

$$2x + C_2 = \frac{y^2}{2a} - a \log y.$$

Опредѣляя произвольныя постоянныя изъ того условія, что $x = 0$ для $y = a$, найдемъ уравненія траекторій въ окончательномъ видѣ:

$$2\left(x - \frac{a\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}\right) = \frac{y^{\varepsilon + 1}}{a^{\varepsilon}(\varepsilon + 1)} - \frac{y^{1-\varepsilon}}{a^{-\varepsilon}(1 - \varepsilon)},$$

или

$$2x + \frac{a}{2} = \frac{y^2}{2a} - a \log \frac{y}{a}.$$

Замѣтимъ, что разстояніе между точками

$$AB = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = y\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}},$$

т. е. по (28)

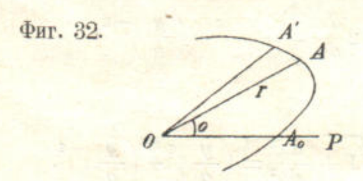
$$AB = \pm \frac{1}{2}\left[\frac{y^{1+\varepsilon}}{a^{\varepsilon}} + \frac{a^{\varepsilon}}{y^{\varepsilon-1}}\right].$$

Когда $\varepsilon \geq 1$, ось x-овъ служитъ асимптотою траекторіи; при томъ для $\varepsilon > 1$ разстояніе между точками безпредѣльно возрастаетъ съ приближеніемъ y къ нулю, а для $\varepsilon = 1$ оно стремится къ предѣлу $\frac{a}{2}$.

Когда $\varepsilon < 1$, то траекторія пересѣкаетъ ось x—овъ, и здѣсь обѣ точки A и B встрѣчаются.

47. Скорость линейная, обобщенная, угловая, секторіальная. Если какая либо величина зависитъ отъ времени, то часто аналитическую производную отъ нея по времени называютъ скоростью, прибавляя къ этому названію какой нибудь эпитетъ. Такъ

Фиг. 32.



скорость нами раньше разсмотрѣнную называютъ иногда скоростью линейною, такъ какъ она служитъ производною по времени отъ длины линіи или дуги траекторіи. Производную по t отъ какой либо криволинейной координаты q называютъ скоростью обоб-

щенною. Если какой либо уголъ, напр. сферическая координата ψ, измѣняется во времени, то производная отъ него по t называется угловою скоростью.

Пусть (фиг. 32) точка движется въ плоскости и описываетъ траекторію A_0AA'; тогда площадь Σ сектора A_0OA, ограниченнаго постоянною прямою OP, траекторіею и перемѣннымъ радіусомъ векторомъ $r = OA$ точки, будетъ функціею времени. Производная

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \text{Пред.} \left\{ \frac{\Delta\Sigma}{\Delta t} \right\}_{\Delta t = 0}$$

носитъ названіе секторіальной скорости. Такъ какъ

$$\Delta\Sigma = \text{безк. мал. сектору } AOA' = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta,$$

если $\theta = \angle POA$, то очевидно

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}. \tag{29}$$

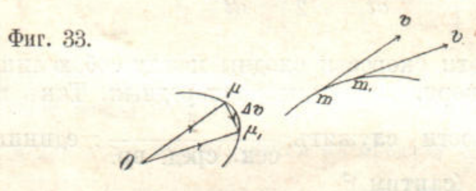
Конечно, всѣ эти скорости сходны между собою лишь по названію и, вообще говоря, величины разнородныя. Такъ напр. единицею угловой скорости служитъ $\frac{1}{\text{сек. сред. вр.}}$; единицею секторіальной скорости $\frac{(\text{сантим.})^2}{\text{сек сред. вр.}}$; ни одна изъ этихъ единицъ не однородна съ (11).

ГЛАВА II.

Годографъ скорости точки. Ускореніе точки.

48. Годографъ скорости точки. Станемъ (фиг. 33) изъ начала координатъ O проводить векторы $O\mu$ геометрически равные вектору, изображающему скорости v движущейся точки m (x, y, z). Тогда геометрическое мѣсто точекъ μ или, что то же, траекторія подвижной точки μ и будетъ годографомъ для векторъ-функціи времени v.

Фиг. 33.



Кривая эта впервые была разсмотрѣна англійскимъ ученымъ Гамильтономъ; ея геометрическія свойства наглядно представляютъ законъ измѣненія скорости со временемъ. Если координаты точки μ означимъ ξ, η, ζ, то по (33) § 31 и (9) § 41 имѣемъ:

$$(1) \qquad \xi = \frac{dx}{dt}\,;\ \eta = \frac{dy}{dt}\,;\ \zeta = \frac{dz}{dt}\,;$$

такъ какъ радіусъ векторъ $O\mu$ геометрически равенъ вектору v. Пусть уравненія движенія точки m:

$$x = f_1(t);\ y = f_2(t);\ z = f_3(t);$$

тогда уравненія движенія точки μ будутъ:

$$\xi = \frac{df_1(t)}{dt} = f_1'(t); \quad \eta = f_2'(t); \quad \zeta = f_3'(t).$$

Исключая изъ послѣднихъ уравненій время, и найдемъ два уравненія годографа.

$$\psi_1(\xi, \eta, \zeta) = 0; \ \psi_2(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Примѣры: а) Уравненія движенія точки m:

$$x = a, \quad y = bt + c, \quad z = gt^2 + et + f.$$

Уравненія движенія точки μ:

$$\xi = 0; \quad \eta = b; \quad \zeta = 2gt + e.$$

Годографъ скорости—прямая: $\xi = 0$, $\eta = b$.

б) Уравненія движенія точки m:

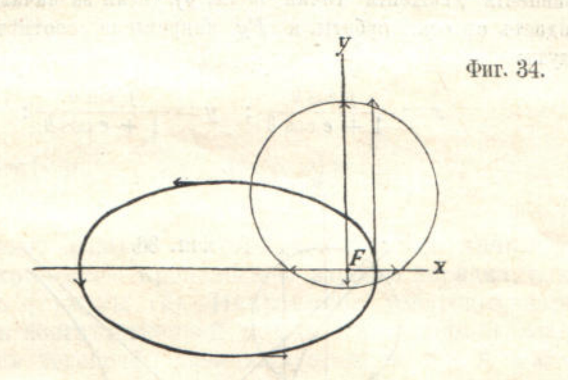
$$x = a \sin\lambda \cos\beta t; \cdot y = a \sin\lambda \sin\beta t; \quad z = a \cos\lambda;$$

гдѣ λ нѣкоторая постоянная.

Уравненія движенія точки μ:

$$\xi = -a\beta \sin\lambda \sin\beta t; \quad \eta = a\beta \sin\lambda \cos\beta t; \quad \zeta = 0.$$

Годографъ скорости—окружность: $\xi^2 + \eta^2 = a^2 \beta^2 \sin^2\lambda$, $\zeta = 0$.



Фиг. 34.

Опредѣлимъ годографъ скорости для такого движенія: точка m описываетъ коническое сѣченіе съ постоянною секторіальною скоростью вокругъ фокуса этого сѣченія.

Плоскость траекторіи или орбиты точки примемъ за плоскость xOy: уравненіе орбиты въ полярныхъ координатахъ, отнесенное къ фокусу F и оси Fx, будетъ:

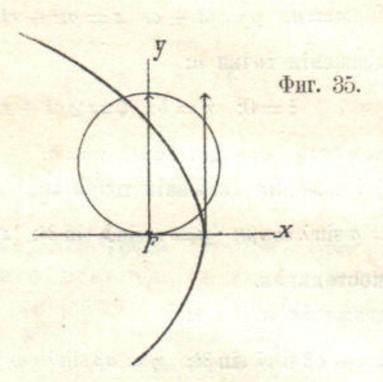
$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta};$$

p—параметръ, а e—эксцентриситетъ орбиты; $e < 1$ для эллипса; $e = 1$ для па-

раболы; $e > 1$ для гиперболы. Постоянство секторіальной скорости по (29) § 47 выразится такъ:

$$r^2\theta' = \frac{p^2\theta'}{(1+e\cos\theta)^2} = A, \tag{2}$$

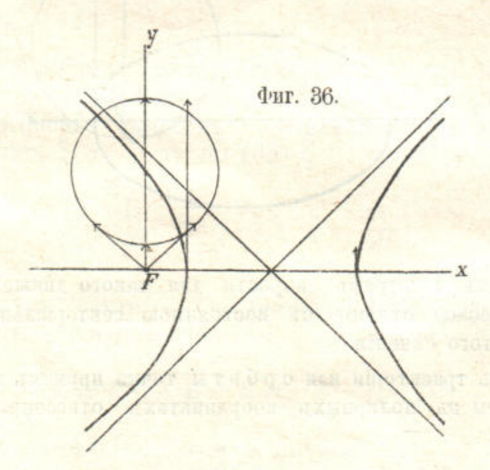
гдѣ A нѣкоторая постоянная.



Фиг. 35.

Уравненія движенія точки $m\ (x, y)$, если за начало взять фокусъ и Fx совпадаетъ съ осью орбиты, а Fy направлена соотвѣтственнымъ образомъ, будутъ:

$$x = \frac{p\cos\theta}{1+e\cos\theta}; \quad y = \frac{p\sin\theta}{1+e\cos\theta};$$



Фиг. 36.

здѣсь θ функція времени, которую надо опредѣлить, интегрируя уравненіе (2), но годографъ можетъ быть найденъ и безъ помощи этого интеграла. Уравненія движенія точки μ по (1):

$$\xi = \frac{dx}{dt} = -\frac{p \sin\theta\, \theta'}{(1 + e\cos\theta)^2};$$

$$\eta = \frac{dy}{dt} = \frac{p(\cos\theta + e)\,\theta'}{(1 + e\cos\theta)^2}.$$

Пользуясь (2), исключаемъ θ';

$$\xi = -\frac{A}{p}\sin\theta; \quad \eta = \frac{A}{p}(\cos\theta + e).$$

Если отсюда исключить θ, то и получится уравненіе годографа.

$$\xi^2 + \left(\eta - \frac{A}{p}e\right)^2 = \frac{A^2}{p^2}.$$

Годографъ оказывается окружностью, пересѣкающею ось Fx, когда < 1, касающеюся оси Fx, когда $e = 1$, и лежащею внѣ оси Fx, когда $e > 1$. Всѣ эти три случая изображены на фиг. 34, 35 и 36.

49. Ускореніе точки. Стрѣлка. Геометрическая производная по времени отъ скорости точки называется ускореніемъ. Мы будемъ означать ускореніе $\dot{v}$. Координатами этого вектора по § 31 будутъ:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\ x) = \frac{d}{dt}\, v\cos(v\ x) = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2};$$

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\ y) = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad \dot{v}\cos(\dot{v}\ z) = \frac{d^2z}{dt^2}. \qquad (3)$$

Относительно радіуса вектора движущейся точки ускореніе является геометрическою производною второго порядка, какъ и показываютъ это формулы (3). Направленіе ускоренія параллельно касательной въ соотвѣтственной точкѣ къ годографу скорости и, если длину дуги годографа означимъ σ, то по своей величинѣ

$$\dot{v} = \frac{d\sigma}{dt}.$$

Ускореніе, какъ производная по времени отъ скорости, не однородна со скоростью. Единицею ускоренія служитъ

$$\frac{\text{сантиметръ}}{(\text{секун. ср. врем.})^2}.$$

Ускореніе по своему направленію можетъ совпадать (во все время движенія) со скоростью лишь тогда, когда годографъ—пря-

мая, проходящая черезъ начало, т. е. когда движеніе прямолинейное. Примемъ въ такомъ случаѣ траекторію за ось x—овъ и положимъ, что ускореніе равно единицѣ; тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2}=1.$$

Интегрируя, найдемъ:

$$\frac{dx}{dt}=t,$$

если точка въ моментъ $t=0$ была въ покоѣ. Интегрируя еще разъ, получимъ:

$$x=\frac{t^2}{2},$$

если точка въ моментъ $t=0$ была въ началѣ координатъ. Уравненія, найденныя нами, говорятъ, что въ прямолинейномъ движеніи съ постояннымъ ускореніемъ, равнымъ единицѣ, точка, выйдя изъ состоянія покоя, по истеченіи единицы времени пріобрѣтетъ скорость единицу и пройдетъ путь въ половину единицы длины.

Направленіе ускоренія служитъ предѣломъ направленія приращенія скорости, т. е. хорды Δv годографа (фиг. 33); хорда эта лежитъ въ одной плоскости съ двумя смежными радіусами векторами годографа, параллельными двумъ смежнымъ касательнымъ траекторіи; поэтому въ предѣлѣ направленіе Δv, а слѣд. и направленіе ускоренія, параллельно плоскости кривизны траекторіи. Если же векторъ, изображающій ускореніе, построимъ изъ того положенія, которое занимаетъ движущаяся точка въ разсматриваемый моментъ, то векторъ этотъ будетъ лежать въ плоскости кривизны траекторіи.

Примѣры: а) Уравненія движенія точки:

$$x=at^2+bt+c;\quad y=a_1t^2+b_1t+c_1;\quad z=a_2t^2+b_2t+c_2.$$

Проекціи ускоренія:

$$\dot v\cos(\dot v x)=2a;\quad \dot v\cos(\dot v y)=2a_1;\quad \dot v\cos(\dot v z)=2a_2.$$

Ускореніе постоянно по величинѣ и по направленію.

б) Уравненія движенія точки:

$$x=a\sin\lambda\cos\beta t;\quad y=a\sin\lambda\sin\beta t.\quad z=a\cos\lambda.$$

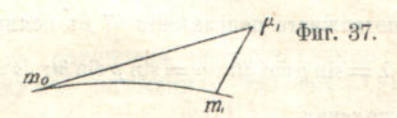
Проекціи ускоренія:

$$\dot v \cos(\dot v\, x) = -a\beta^2 \sin\lambda \cos\beta t; \quad \dot v \cos(\dot v\, y) = -a\beta^2 \sin\lambda \sin\beta t;$$

$$\dot v \cos(\dot v\, z) = 0.$$

Ускореніе равно $a\beta^2 \sin\lambda$ и направлено по перпендикуляру, опущенному изъ движущейся точки на ось z—овъ.

Пусть точка m (x, y, z) описываетъ (фиг. 37) нѣкоторую криволинейную траекторію $m_0\, m_1$, и вмѣстѣ съ нею пусть другая точка μ равномѣрно движется по касательной $m_0\,\mu_1$ съ тою же скоростью v, которую имѣла m въ положеніи m_0. Обѣ точки одновременно выходятъ изъ m_0. По истеченіи безконечно малаго времени Δt точка m приходитъ въ положеніе m_1 на траекторіи, а μ въ положеніе μ_1 на касательной. Безконечно малый отрѣзокъ $\mu_1\, m_1$ носитъ названіе **стрѣлки**. Опредѣлимъ его величину и направленіе.



Фиг. 37.

Координаты точки m_1 будутъ: $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, гдѣ $\Delta x = x'\Delta t + \frac{1}{2} x''\Delta t^2 + \ldots$; $\Delta y = y'\Delta t + \frac{1}{2} y''\Delta t^2 + \ldots$; $\Delta z = z'\Delta t + \frac{1}{2} z''\Delta t^2 + \ldots$ Координатами точки μ_1 служатъ: $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, гдѣ $\delta x = x'\Delta t$; $\delta y = y'\Delta t$; $\delta z = z'\Delta t$.

Проекціи вектора $\mu_1 m_1$ на оси, очевидно, будутъ:

$$\mu_1\, m_1 \cos(\mu_1 m_1, x) = \Delta x - \delta x = \frac{1}{2} x''\, \Delta t^2;$$

$$\mu_1\, m_1 \cos(\mu_1 m_1, y) = \Delta y - \delta y = \frac{1}{2} y''\, \Delta t^2;$$

$$\mu_1\, m_1 \cos(\mu_1 m_1, z) = \Delta z - \delta z = \frac{1}{2} z''\, \Delta t^2;$$

Отсюда заключаемъ, что направленіе $\mu_1\, m_1$ съ точностью до безконечно малыхъ второго порядка совпадаетъ съ направленіемъ ускоренія $\dot v$, а по величинѣ

$$\mu_1\, m_1 = \frac{1}{2} \dot v \Delta t^2. \tag{4}$$

50. Проекціи ускоренія точки на неподвижное и подвижное направленія. Пользуясь выводами § 33, для проекціи ускоренія на неподвижное направленіе U имѣемъ выраженіе:

$$\dot v \cos(\dot v U) = \frac{d}{dt}\left[v \cos(vU)\right],$$

а для подвижнаго направленія U получаемъ формулу:

$$\dot v \cos(\dot v U) = \frac{d}{dt}\left[v \cos(vU)\right] - v\dot u \cos(v\dot u), \tag{5}$$

гдѣ $\dot u$ поворотная скорость (§ 42) направленія U.

Примѣръ: Уравненія движенія точки:

$$x = a\sin\alpha t\cos\beta t;\quad y = a\sin\alpha t\sin\beta t;\quad z = a\cos\alpha t.$$

Косинусы подвижнаго направленія U съ осями координатъ

$$\lambda = \sin p\cos\beta t;\quad \mu = \sin p\sin\beta t;\quad \nu = \cos p;$$

p—нѣкоторая постоянная.

Тогда

$$v\cos(vU) = \frac{dx}{dt}\lambda + \frac{dy}{dt}\mu + \frac{dz}{dt}\nu = -a\alpha\sin(\alpha t - p).$$

$$v\dot u\cos(v\dot u) = \frac{dx}{dt}\frac{d\lambda}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\mu}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\nu}{dt} = a\beta^2\sin p\sin\alpha t.$$

Отсюда

$$\dot v\cos(\dot v U) = -a\alpha^2\cos(\alpha t - p) - a\beta^2\sin p\sin\alpha t.$$

51. Ускореніе тангенціальное и нормальное (центростремительное). Представимъ себѣ, что уравненія движенія точки даны намъ въ спеціальномъ видѣ (8) § 40. Въ этомъ предположеніи составимъ выраженія для проекцій ускоренія на оси декартовыхъ координатъ. Дважды дифференцируя x, какъ функцію сложную отъ t, получимъ:

$$\dot v\cos(\dot v x) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d^2x}{ds^2}\frac{ds^2}{dt^2}.$$

Замѣтимъ, что $\frac{dx}{ds} = \cos(Tx)$, если черезъ T означимъ направленіе касательной къ траекторіи, и что по (38) § 32

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\cos(\rho x)}{\rho},$$

(s); $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}$; $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx}{ds}$

если ρ означаетъ одновременно и величину и направленіе радіуса кривизны траекторіи. Поэтому, замѣняя $\frac{ds}{dt}$ черезъ v, и слѣд. $\frac{d^2s}{dt^2}$ черезъ $\frac{dv}{dt}$, мы можемъ предъидущее равенство переписать такъ:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\ x)=\frac{dv}{dt}\cos(Tx)+\frac{v^2}{\rho}\cos(\rho x). \tag{6}$$

Сюда, конечно, присоединяются еще два:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\ y)=\frac{dv}{dt}\cos(Ty)+\frac{v^2}{\rho}\cos(\rho y);$$

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\ z)=\frac{dv}{dt}\cos(Tz)+\frac{v^2}{\rho}\cos(\rho z). \tag{6'}$$

Если умножимъ эти равенства соотвѣтственно на $\cos(Tx)$, $\cos(Ty)$, $\cos(Tz)$ и сложимъ, замѣтивъ, что $\cos(T\rho)=0$, то получимъ:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\ T)=\frac{dv}{dt}. \tag{7}$$

Подобнымъ образомъ, умножая на $\cos(\rho x)$, $\cos(\rho y)$, $\cos(\rho z)$, найдемъ:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\ \rho)=\frac{v^2}{\rho}. \tag{8}$$

Наконецъ, если умножимъ на $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$, гдѣ n направленіе бинормали, то получимъ:

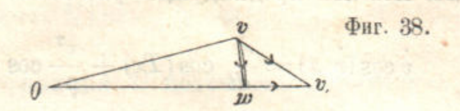
$$\dot{v}\cos(\dot{v}\ n)=0, \tag{9}$$

ибо $\cos(Tn)=\cos(\rho n)=0$.

Послѣднее равенство еще разъ подтверждаетъ, что ускореніе лежитъ въ плоскости кривизны траекторіи; предъидущія же два даютъ значенія составляющихъ ускоренія точки по касательной (ускореніе тангенціальное) и по главной нормали къ траекторіи (ускореніе нормальное). Три равенства (6) могутъ быть замѣнены однимъ:

$$(\dot{v})=\left(\frac{dv}{dt}\right)+\left(\frac{v^2}{\rho}\right),$$

если будемъ помнить, что направленіе $\frac{dv}{dt}$ идетъ по касательной, а $\frac{v^2}{\rho}$ по радіусу кривизны къ центру кривизны (§ 32).



Фиг. 38.

Тотъ же результатъ можно получить и геометрическимъ путемъ. Пусть (фиг. 38) векторы Ov и Ov_1 изображаютъ скорости точки въ моменты t и $t+\Delta t$. Опишемъ радіусомъ Ov изъ O безконечно малую дугу vw. Тогда приращеніе скорости vv_1 можно разсматривать какъ геометрическую сумму векторовъ vw и wv_1; потому и послѣ дѣленія на Δt (§ 4);

$$\left(\frac{vv_1}{\Delta t}\right)=\left(\frac{vw}{\Delta t}\right)+\left(\frac{wv_1}{\Delta t}\right).$$

Векторъ wv_1, по построенію, равняется аналитическому приращенію скорости δv. Векторъ $vw = Ov\,.\,\varepsilon = v\,.\,\varepsilon$ гдѣ ε уголъ между сосѣдними скоростями или, что то же, уголъ смежности траекторіи Отношеніе

$$\frac{vw}{\Delta t}=v\,.\,\frac{\varepsilon}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t},$$

если Δs означаетъ приращеніе длины дуги траекторіи, соотвѣтствующее Δt.

Обращаясь къ предѣлу, находимъ:

$$\underset{\Delta t=0}{\text{Пред.}}\left(\frac{vv_1}{\Delta t}\right)=\dot{v};$$

$$\underset{\Delta t=0}{\text{Пред.}}\left(\frac{wv_1}{\Delta t}\right)=\underset{\Delta t=0}{\text{Пред.}}\left(\frac{\delta v}{\Delta t}\right)=\frac{dv}{dt};$$

$$\underset{\Delta t=0}{\text{Пред.}}\left(\frac{vw}{\Delta t}\right)=v\,.\,\text{Пред.}\left(\frac{\varepsilon}{\Delta s}\right).\ \text{Пред.}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)=\frac{v^2}{\rho};$$

такъ какъ, по опредѣленію, Пред. $\left(\frac{\varepsilon}{\Delta s}\right)=\frac{1}{\rho}$.

Искомыя составляющія ускоренія найдены, если еще замѣтимъ, что предѣльное направленіе wv_1 совпадаетъ съ v, т. е. съ касательной, а направленіе vw лежитъ въ одной плоскости съ двумя смежными касательными, перпендикулярно къ v и идетъ въ ту сторону, въ которую поворачивается касательная, т. е. къ центру кривизны.

Тангенціальное ускореніе вліяетъ лишь на величину скорости, а нормальное измѣняетъ направленіе скорости. Если движеніе равномѣрное, то нѣтъ тангенціальнаго ускоренія; если движеніе прямолинейное, то нормальное обращается въ нуль, и только для равномѣрнаго прямолинейнаго движенія оба ускоренія равны нулю.

Иногда нормальное ускореніе по его направленію называютъ центростремительнымъ.

52. Проекціи ускоренія точки на оси криволинейныхъ координатъ. Пользуясь обозначеніями § 43, составимъ выраженія для проекцій ускоренія точки на оси криволинейныхъ координатъ 1, 2, 3. Мы имѣемъ:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\ 1)=\frac{d^2x}{dt^2}\alpha_1+\frac{d^2y}{dt^2}\beta_1+\frac{d^2z}{dt^2}\gamma_1=x''\alpha_1+y''\beta_1+z''\gamma_1;$$

или, подставляя изъ (21) § 43:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\ 1)=\frac{1}{A_1}\left(x''\frac{\partial x}{\partial q_1}+y''\frac{\partial y}{\partial q_1}+z''\frac{\partial z}{\partial q_1}\right).$$

Выраженіе это можемъ переписать такъ:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\ 1)=\frac{1}{A_1}\frac{d}{dt}\left(x'\frac{\partial x}{\partial q_1}+y'\frac{\partial y}{\partial q_1}+z'\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)-$$

$$-\frac{1}{A_1}\left(x'\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_1}+y'\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial q_1}+z'\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right).$$

Если же воспользуемся (17) § 43, то найдемъ:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\ 1)=\frac{1}{A_1}\frac{d}{dt}\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q_1'}+y'\frac{\partial y'}{\partial q_1'}+z'\frac{\partial z'}{\partial q_1'}\right)-$$

$$-\frac{1}{A_1}\left(x'\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_1}+y'\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial q_1}+z'\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right). \qquad (10)$$

Продифференцируемъ по времени производную $\frac{\partial x}{\partial q_1}$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_1}=\frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2}q_1'+\frac{\partial^2 x}{\partial q_1\partial q_2}q_2'+\frac{\partial^2 x}{\partial q_1\partial q_3}q_3'.$$

Съ другой стороны, если отъ x' (16) § 43 возьмемъ частную производную по q_1, то получимъ

$$\frac{\partial x'}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} q_1' + \frac{\partial^2 x}{\partial q_2 \partial q_1} q_2' + \frac{\partial^2 x}{\partial q_3 \partial q_1} q_3'.$$

Отсюда выводимъ, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{\partial x'}{\partial q_1}.$$

Подобнымъ образомъ найдемъ вообще:

$$(11) \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{\partial x'}{\partial q_i}; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial q_i} = \frac{\partial y'}{\partial q_i}; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial q_i} = \frac{\partial z'}{\partial q_i}; \quad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Обратимъ свое вниманіе на то, что любое изъ этихъ равенствъ, напр. первое, можно написать такъ:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q_i} x = \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{d}{dt} x;$$

отсюда выводимъ для полученныхъ формулъ такое мнемоническое правило: символы $\frac{d}{dt}$ и $\frac{\partial}{\partial q_i}$ перестановимы.

Подставляя изъ (11) въ (10) и вводя снова обозначеніе h изъ (15) § 43, находимъ

$$(12) \qquad \dot{v} \cos(\dot{v}\ 1) = \frac{1}{A_1}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial h}{\partial q_1'} - \frac{\partial h}{\partial q_1}\right\}.$$

Сюда присоединяются еще два выраженія для другихъ осей:

$$\dot{v} \cos(\dot{v}\ 2) = \frac{1}{A_2}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial h}{\partial q_2'} - \frac{\partial h}{\partial q_2}\right\};$$

$$(12') \qquad \dot{v} \cos(\dot{v}\ 3) = \frac{1}{A_3}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial h}{\partial q_3'} - \frac{\partial h}{\partial q_3}\right\}.$$

Относительно полученныхъ формулъ мы можемъ сдѣлать слѣдующее замѣчаніе: изъ нихъ оказывается, что при замѣнѣ въ выраженіяхъ для ускоренія декартовыхъ координатъ криволинейными можно ограничиться преобразованіемъ къ новымъ перемѣннымъ

одного только дифференціальнаго выраженія перваго порядка h, тогда какъ непосредственный переходъ отъ однѣхъ формулъ для ускоренія къ другимъ требовалъ бы преобразованія дифференціальныхъ выраженій второго порядка.

Для сферическихъ координатъ формулы (12) при прежнихъ обозначеніяхъ даютъ:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\,\alpha)=\rho''-\rho\varphi'^2-\rho\sin^2\varphi\,\psi'^2;$$

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\,\beta)=\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\varphi')-\rho\sin\varphi\cos\varphi\,\psi'^2; \tag{13}$$

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\,\gamma)=\frac{1}{\rho\sin\varphi}\frac{d}{dt}(\rho^2\sin^2\varphi\,\psi').$$

Для цилиндрическихъ координатъ найдемъ:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\,\lambda)=z'';$$

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\,\mu)=r''-r\theta'^2; \tag{14}$$

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\,\nu)=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\theta').$$

53. Геометрическая производная отъ скорости, какъ отъ приложеннаго вектора. До сихъ поръ мы принимали скорость за простой векторъ; станемъ теперь разсматривать ее какъ векторъ приложенный, полагая, что точкою приложенія служитъ сама движущаяся точка. Тогда координатами такого вектора будутъ величины:

$$x',\ y',\ z',\ x,\ y,\ z;$$

или, если возьмемъ другую систему координатъ § 13:

$$x',\ y',\ z',\ \ z'y-y'z,\ \ x'z-z'x,\ \ y'x-x'y.$$

Опредѣлимъ теперь, какой приложенный векторъ будетъ представлять собою геометрическую производную (§ 35) отъ этого приложеннаго вектора.

Координаты X, Y, Z, L, M, N искомой производной будутъ:

$$X=\frac{dx'}{dt}=x'';\quad Y=y'';\quad Z=z'';$$

$$L=\frac{d}{dt}(z'y-y'z)=z''y-y''z;\quad M=x''z-z''x;\quad N=y''x-x''y.$$

Очевидно, по другой системѣ, тотъ же векторъ можно выразить координатами:

$$x'',\ y''\ z'',\ x,\ y,\ z.$$

Отсюда выводимъ такое положеніе: геометрическою производною отъ вектора скорости, приложеннаго къ движущейся точкѣ, служитъ векторъ ускореніе, приложенный къ той же точкѣ.

54. Выводъ закона Ньютона изъ законовъ Кеплера. Въ видѣ приложенія выше полученныхъ результатовъ рѣшимъ слѣдующую задачу: точка описываетъ коническое сѣченіе съ постоянною секторіальною скоростью вокругъ фокуса этого сѣченія; опредѣлить величину и направленіе ускоренія.

Подобно тому, какъ это было сдѣлано въ § 48, условія задачи выражаются равенствами:

(15) $$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}; \quad r^2\theta' = A.$$

Замѣтимъ, что по (4) § 39 уравненію траекторіи можемъ дать видъ

(16) $$r + ex = p.$$

Изъ (3) того же § 39 имѣемъ такую зависимость между декартовыми и полярными координатами:

$$r^2 = x^2 + y^2; \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Поэтому

$$r^2\theta' = xy' - yx'$$

Дифференцируя по времени, найдемъ

$$xy'' - yx'' = 0,$$

или

$$\frac{y''}{y} = \frac{x''}{x}.$$

Отсюда выводимъ, что ускореніе $\dot{v}$ параллельно r, т. е. направленіе его, какъ приложеннаго вектора, проходитъ черезъ начало координатъ.

Означимъ величину ускоренія черезъ R, тогда можемъ написать

$$x'' = R\frac{x}{r}; \quad y'' = R\frac{y}{r}.$$

Точнѣе говоря, мы означили черезъ R проекцію ускоренія на ось ρ полярныхъ координатъ (§ 39). Знакъ R укажетъ намъ направленіе ускоренія; при $R > 0$, $\dot{v}$ пойдетъ отъ фокуса, при $R < 0$, $\dot{v}$ будетъ направлено къ фокусу.

Дифференцируя уравненіе (16), находимъ

$$r'' = -ex'' = -eR\frac{x}{r}. \qquad (17)$$

Съ другой стороны по (14) § 52:

$$R = r'' - r\vartheta'^2.$$

Подставляя сюда изъ (15) и (17), получимъ

$$R(r + ex) = -\frac{A^2}{r^2},$$

или по (16).

$$R = -\frac{A^2}{p}\cdot\frac{1}{r^2}.$$

Такимъ образомъ оказывается, что ускореніе направлено къ фокусу и обратно пропорціонально квадрату разстоянія.

55. Ускореніе точки второго и высшихъ порядковъ. Составляя геометрическую производную отъ ускоренія точки по времени, мы получимъ векторъ, $\ddot{v}$, называемый ускореніемъ второго порядка. Координаты его по § 31 будутъ

$$\ddot{v}\cos(\ddot{v}x) = \frac{d^3x}{dt^3} = x'''; \quad \ddot{v}\cos(\ddot{v}y) = y'''; \quad \ddot{v}\cos(\ddot{v}z) = z'''.$$

Продолжая такимъ образомъ, мы можемъ составить выраженія для координатъ ускоренія любого n—таго порядка: $\overset{(n)}{v}$; эти координаты будутъ:

$$\overset{(n)}{v}\cos(\overset{(n)}{v}x) = \frac{d\overset{n+1}{x}}{dt^{n+1}} = \overset{(n+1)}{x}; \quad \overset{(n)}{v}\cos(\overset{(n)}{v}y) = \overset{(n+1)}{y}; \quad \overset{(n)}{v}\cos(\overset{(n)}{v}z) = \overset{(n+1)}{z}.$$

Подробнѣе разсматривать свойства этихъ векторовъ мы не будемъ.

КИНЕМАТИКА ТВЕРДАГО ТѢЛА.

ГЛАВА III.

Координаты твердаго тѣла. Конечныя уравненія движенія.

56. Твердое тѣло. Движеніе прямое и обращенное. Твердымъ тѣломъ въ кинематическомъ смыслѣ или неизмѣняемою системою точекъ, какъ мы уже видѣли (§ 38), называется трехмѣрная неизмѣнная среда, элементомъ коей служитъ точка.

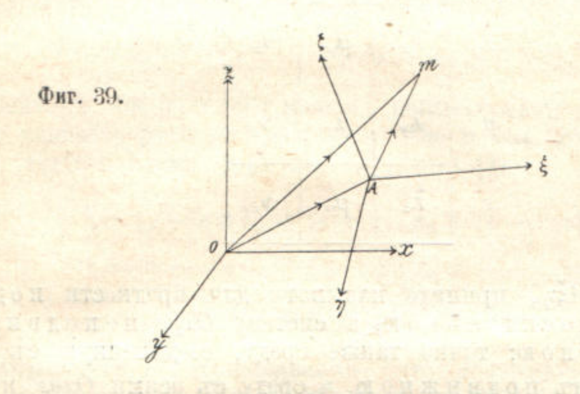
Подъ движеніемъ твердаго тѣла въ данной средѣ разумѣется послѣдовательное совпаденіе точекъ тѣла съ различными точками среды. Движеніе твердаго тѣла намъ извѣстно, если мы въ состояніи опредѣлить движеніе любой его точки. Термины „твердое тѣло“ въ кинематическомъ смыслѣ и „неизмѣняемая среда“—синонимы, поэтому вмѣсто словъ: движеніе твердаго тѣла въ данной средѣ, можно сказать: движеніе одной неизмѣняемой среды въ другой.

Если движущаяся среда конечныхъ размѣровъ и слѣд. ограничена нѣкоторою поверхностью, то мы все-таки будемъ предполагать, что эта среда можетъ быть продолжена и за свои границы, такъ что въ любомъ мѣстѣ мы можемъ найти точку, принадлежащую взятому твердому тѣлу. И такъ, пусть среда A движется въ средѣ B, т. е. точки a среды A совпадаютъ послѣдовательно съ различными точками b среды B. Но тогда съ другой стороны и точки b среды B переходятъ изъ однѣхъ точекъ a въ другія, т. е. среда B движется въ средѣ A. Такимъ образомъ, движеніе неизмѣняемой среды носитъ всегда двойственный характеръ; когда одна среда движется въ другой, то и наоборотъ другая движется въ первой. Эти два движенія, вообще говоря, различны между собою, и одно изъ нихъ называется прямымъ, а другое обращеннымъ. Какое изъ двухъ движеній считать прямымъ,

какое обращеннымъ, зависитъ вполнѣ отъ нашего условія. Такъ, станемъ разсматривать двѣ неизмѣняемыхъ среды, частями которыхъ служатъ съ одной стороны объемъ луны, а съ другой объемъ земли; тогда, если движеніе лунной среды въ средѣ неизмѣнно связанной съ землею, прямемъ за прямое, то обращеннымъ движеніемъ, неизбѣжно сопровождающимъ первое, будетъ движеніе земной среды въ лунной.

57. Координаты твердаго тѣла. Эйлеровы углы. Прежде всего займемся координатами твердаго тѣла, т. е. величинами, опредѣляющими положеніе одной неизмѣняемой среды въ другой.

Фиг. 39.



Вообразимъ (фиг. 39) въ данной движущейся средѣ Σ систему прямоугольныхъ декартовыхъ координатныхъ плоскостей $A\xi\eta\zeta$, неизмѣнно съ этимъ движущимся тѣломъ связанную, т. е. такую, что разстоянія всякой точки этихъ плоскостей отъ любой точки тѣла не измѣняются съ теченіемъ времени. Тогда точки твердаго тѣла будутъ отличаться одна отъ другой своими координатами ξ, η, ζ по отношенію ко взятой системѣ; при томъ координаты эти постоянны во времени. Далѣе, точки той среды S, въ которой происходитъ движеніе, отнесемъ также къ системѣ декартовыхъ координатъ $Oxyz$, неизмѣнно связанной съ этою средою S. Положеніе твердаго тѣла Σ въ средѣ S намъ будетъ извѣстно, если мы сможемъ указать положеніе любой точки его μ (ξ, η, ζ) или (§ 39) ту точку m (x, y, z) среды S, съ которою точка μ совпадаетъ.

Другими словами, надо найти зависимость между координатами ξ, η, ζ и x, y, z одной и той же точки по отношенію къ двумъ различнымъ системамъ осей. Въ аналитической геометріи такая задача рѣшается съ помощью слѣдующихъ формулъ преобразованія, служащихъ для перехода отъ системы $A\xi\eta\zeta$ къ новой системѣ $Oxyz$:

$$
\begin{aligned}
x &= x_A + \xi\lambda_x + \eta\mu_x + \zeta\nu_x ; \\
(1) \qquad y &= y_A + \xi\lambda_y + \eta\mu_y + \zeta\nu_y ; \\
z &= z_A + \xi\lambda_z + \eta\mu_z + \zeta\nu_z ;
\end{aligned}
$$

Здѣсь x_A, y_A, z_A координаты относительно $Oxyz$ начала A осей $A\xi\eta\zeta$, а $\lambda_x \ldots \nu_z$ косинусы угловъ однѣхъ осей съ другими по нижеслѣдующей схемѣ

	ξ	η	ζ
x	λ_x	μ_x	ν_x
y	λ_y	μ_y	ν_y
z	λ_z	μ_z	ν_z

Систему $A\xi\eta\zeta$ принято называть для краткости **подвижною** или **относительною**, а систему $Oxyz$ **неподвижною** или **абсолютною**; точно также среду, соединенную съ осями $A\xi\eta\zeta$, называютъ **подвижною**, а среду съ осями $Oxyz$ **неподвижною**.

Три равенства (1) могутъ быть выведены непосредственно изъ того соображенія, что (фиг. 39) радіусъ векторъ Om или $O\mu$ представляетъ собою геометрическую сумму векторовъ OA и Am. Возьмемъ проекціи на Ox; тогда

$$Om \cos(Om, x) = OA \cos(OA, x) + Am \cos(Am, x).$$

Но

$$Om \cos(Om, x) = x ; \quad OA \cos(OA, x) = x_A ,$$

$$Am \cos(Am, x) = Am \cos(Am, \xi)\,\lambda_x + Am \cos(Am, \eta)\,\mu_x +$$

$$+ Am \cos(Am, \zeta)\,\nu_x = \xi\lambda_x + \eta\mu_x + \zeta\nu_x .$$

Подставляя, и получимъ первую формулу изъ (1). Взявши проекціи на другія оси, найдемъ и остальныя.

Вслѣдствіе ортогональности обѣихъ системъ координатъ между косинусами $\lambda_x \ldots \nu_z$ существуютъ шесть такихъ зависимостей:

$$\lambda_x^2+\lambda_y^2+\lambda_z^2=1;\quad \mu_x\nu_x+\mu_y\nu_y+\mu_z\nu_z=0;$$
$$\mu_x^2+\mu_y^2+\mu_z^2=1;\quad \nu_x\lambda_x+\nu_y\lambda_y+\nu_z\lambda_z=0;\qquad (2)$$
$$\nu_x^2+\nu_y^2+\nu_z^2=1;\quad \lambda_x\mu_x+\lambda_y\mu_y+\lambda_z\mu_z=0.$$

Эти равенства могутъ быть замѣнены другими шестью, имъ равносильными:

$$\lambda_x^2+\mu_x^2+\nu_x^2=1;\quad \lambda_y\lambda_z+\mu_y\mu_z+\nu_y\nu_z=0;$$
$$\lambda_y^2+\mu_y^2+\nu_y^2=1;\quad \lambda_z\lambda_x+\mu_z\mu_x+\nu_z\nu_x=0;\qquad (3)$$
$$\lambda_z^2+\mu_z^2+\nu_z^2=1;\quad \lambda_x\lambda_y+\mu_x\mu_y+\nu_x\nu_y=0.$$

Векторъ Am (фиг. 39) можемъ разсматривать какъ геометрическую разность радіусовъ векторовъ Om и OA. Взявши проекціи на оси $A\xi\eta\zeta$, найдемъ формулы, обратныя (1)

$$\xi=(x-x_A)\lambda_x+(y-y_A)\lambda_y+(z-z_A)\lambda_z;$$
$$\eta=(x-x_A)\mu_x+(y-y_A)\mu_y+(z-z_A)\mu_z;\qquad (4)$$
$$\zeta=(x-x_A)\nu_x+(y-y_A)\nu_y+(z-z_A)\nu_z.$$

Выраженія (1) показываютъ, что положеніе твердаго тѣла опредѣляется двѣнадцатью величинами: тремя координатами x_A, y_A, z_A и девятью косинусами. Но между этими косинусами существуютъ шесть зависимостей (2) или (3). слѣд. независимыхъ координатъ твердаго тѣла всего шесть. За такія координаты можемъ принять x_A, y_A, z_A и любые три косинуса, только не входящіе одновременно въ какое либо изъ первыхъ отношеній (2) или (3).

Возьмемъ послѣднія два изъ выраженій (2):

$$\lambda_x\mu_x+\lambda_y\mu_y+\lambda_z\mu_z=0;$$
$$\lambda_x\nu_x+\lambda_y\nu_y+\lambda_z\nu_z=0;$$

и исключимъ изъ нихъ сначала λ_z, потомъ λ_y; тогда придемъ къ равенству такихъ отношеній:

$$\frac{\lambda_x}{\mu_y\nu_z-\mu_z\nu_y}=\frac{\lambda_y}{\mu_z\nu_x-\mu_x\nu_z}=\frac{\lambda_z}{\mu_x\nu_y-\mu_y\nu_x}=$$
$$=\frac{\sqrt{\lambda_x^2+\lambda_y^2+\lambda_z^2}}{\sqrt{(\mu_y\nu_z-\mu_z\nu_y)^2+(\mu_z\nu_x-\mu_x\nu_z)^2+(\mu_x\nu_y-\mu_y\nu_x)^2}}.$$

Но по извѣстному соотношенію Эйлера:

$$(\mu_y \nu_z - \mu_z \nu_y)^2 + (\mu_z \nu_x - \mu_x \nu_z)^2 + (\mu_x \nu_y - \mu_y \nu_x)^2 =$$

$$= (\mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2)(\nu_x^2 + \nu_y^2 + \nu_z^2) - (\mu_x \nu_x + \mu_y \nu_y + \mu_z \nu_z)^2 :$$

слѣд. по (2) находимъ

$$\frac{\lambda_x}{\mu_y \nu_z - \mu_z \nu_y} = \frac{\lambda_y}{\mu_z \nu_x - \mu_x \nu_z} = \frac{\lambda_z}{\mu_x \nu_y - \mu_y \nu_x} = \pm 1.$$

Замѣтимъ, что мы всегда будемъ предполагать подвижную и неподвижную системы осей соотвѣтственными, т. е. такими, что при совпаденіи $A\xi$ съ Ox, $A\eta$ съ Oy и оси $A\zeta$ и Oz совпадаютъ своими положительными направленіями. Въ такомъ случаѣ возможны слѣдующія значенія косинусовъ: $\lambda_x = \mu_y = \nu_z = 1$; $\lambda_y = \mu_z = \nu_x = \lambda_z = \mu_x = \nu_y = 0$, и слѣд. изъ двухъ знаковъ при единицѣ мы должны выбрать плюсъ. Такимъ и подобнымъ образомъ приходимъ къ равенствамъ, которыми намъ придется впослѣдствіи пользоваться:

$$\lambda_x = \mu_y \nu_z - \mu_z \nu_y, \quad \lambda_y = \mu_z \nu_x - \mu_x \nu_z, \quad \lambda_z = \mu_x \nu_y - \mu_y \nu_x,$$

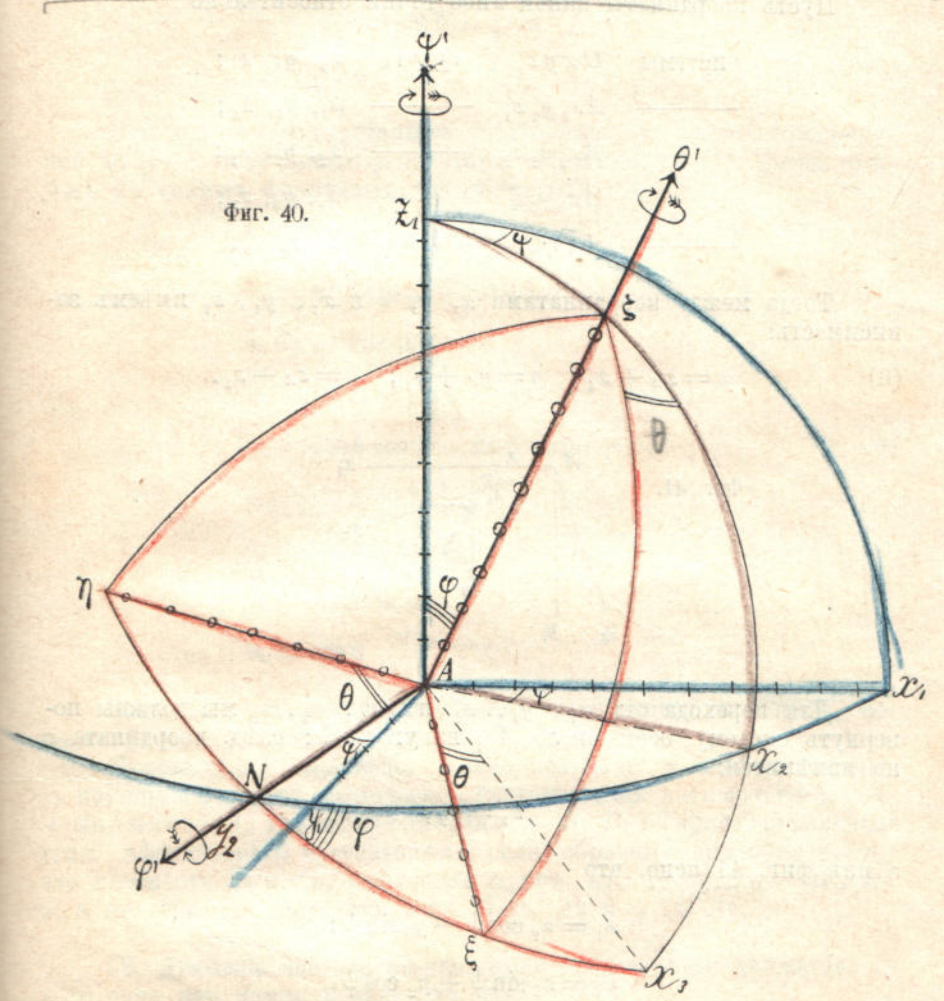
(5) $$\mu_x = \nu_y \lambda_z - \nu_z \lambda_y, \quad \mu_y = \nu_z \lambda_x - \nu_x \lambda_z, \quad \mu_z = \nu_x \lambda_y - \nu_y \lambda_x,$$

$$\nu_x = \lambda_y \mu_z - \lambda_z \mu_y, \quad \nu_y = \lambda_z \mu_x - \lambda_x \mu_z, \quad \nu_z = \lambda_x \mu_y - \lambda_y \mu_x.$$

Типичнымъ изъ этихъ выраженій можно считать первое $\lambda_x = \mu_y \nu_z - \mu_z \nu_y$; всѣ остальныя получаются съ помощью круговой подстановки буквъ λ, μ, ν и значковъ x, y, z.

Вмѣсто трехъ изъ косинусовъ $\lambda_x \ldots \nu_z$ за независимыя координаты твердаго тѣла обыкновенно берутъ три угла, носящихъ названіе угловъ Эйлера. Построимъ (фиг. 40) изъ начала A подвижныхъ осей систему $Ax_1 y_1 z_1$, параллельную неподвижной $Oxyz$. Тогда, очевидно, положеніе осей $\xi\eta\zeta$ относительно $x_1 y_1 z_1$ опредѣлится съ помощью угловъ ψ, φ и θ : ψ — двугранный уголъ между плоскостями $z_1 x_1$ и $z_1 \zeta$; φ — уголъ между осями Az_1 и $A\zeta$; θ — двугранный уголъ между плоскостями $z_1 \zeta$ и $\zeta\xi$. Уголъ ψ считается вокругъ оси Az_1, уголъ φ — вокругъ оси AN, перпендикулярной къ плоскости $z_1 \zeta$; уголъ θ — вокругъ оси $A\zeta$. Направленіе, въ которомъ углы возрастаютъ, указано на чертежѣ стрѣлкою. Общее правило для опредѣленія этого направленія такое: пусть наблюдатель стоитъ по соотвѣтственной оси, причемъ ось идетъ отъ ногъ къ головѣ, тогда для него, при увеличеніи угла,

соотвѣтственная плоскость или прямая кажутся перемѣщающимися по часовой стрѣлкѣ. Уголъ ψ называютъ иногда прецессіоннымъ угломъ, а уголъ φ — нутаціоннымъ.



Фиг. 40.

Зависимость косинусовъ $\lambda_x \ldots \nu_z$ отъ новыхъ координатъ можно установить слѣдующимъ образомъ. Повернемъ оси $z_1 x_1 y_1$ около Az_1 въ положительномъ направленіи на уголъ ψ; тогда приведемъ систему въ положеніе $z_1 x_2 y_2$. При этомъ, очевидно, Ay_2 совпадетъ съ AN, а Ax_2 ляжетъ въ плоскость $z_1\zeta$. Тогда повертываемъ оси $z_1 x_2 y_2$ около Ay_2 на уголъ φ въ положительномъ направленіи; система придетъ въ положеніе $\zeta x_3 y_3$, и ось Ax_3 совпа-

детъ съ плоскостью $\xi\eta$. Наконецъ поворотъ около $A\zeta$ на уголъ θ въ положительномъ направленіи совмѣстить оси $\zeta x_3 y_3$ съ осями $\zeta\xi\eta$.

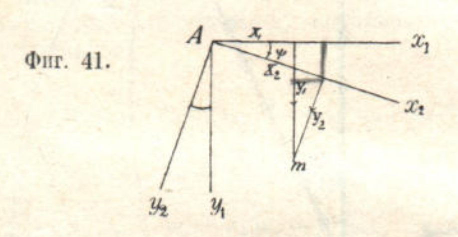
Пусть координаты какой либо точки относительно

системы	$O\,x\,y\,z$	будутъ	$x,\ y,\ z$;
———	$A\,x_1\,y_1\,z_1$	———	$x_1,\ y_1,\ z_1$;
———	$A\,x_2\,y_2\,z_2$	———	$x_2,\ y_2,\ z_2$;
———	$A\,x_3\,y_3\,\zeta$	———	$x_3,\ y_3,\ z_3$;
———	$A\,\xi\,\eta\,\zeta$	———	$\xi,\ \eta,\ \zeta$.

Тогда между координатами $x,\ y,\ z$ и $x_1,\ y_1,\ z_1$ имѣемъ зависимость:

(6) $$x = x_A + x_1;\quad y = y_A + y_1;\quad z = z_A + z_1.$$

Фиг. 41.



Для перехода отъ $x_1,\ y_1,\ z_1$ къ $x_2,\ y_2,\ z_2$ мы должны повернуть систему осей около Az_1 на уголъ ψ; слѣд. координата z не измѣнится:

$$z_1 = z_2;$$

а изъ фиг. 41 ясно, что

$$x_1 = x_2 \cos\psi - y_2 \sin\psi;$$

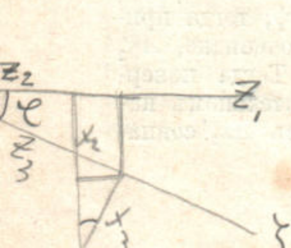
$$y_1 = x_2 \sin\psi + y_2 \cos\psi.$$

Подобнымъ образомъ

$$x_2 = x_3 \cos\varphi + z_3 \sin\varphi;$$

$$y_2 = y_3;$$

$$z_2 = -x_3 \sin\varphi + z_3 \cos\varphi;$$



и наконецъ

$$x_3 = \xi \cos\theta - \eta \sin\theta;$$

$$y_3 = \xi \sin\theta + \eta \cos\theta;$$

$$z_3 = \zeta.$$

Эти выраженія подставимъ послѣдовательно во всѣ предъидущія до (6) и полученные результаты сравнимъ съ (1). Тогда придемъ къ такимъ формуламъ для косинусовъ:

$$\begin{aligned}
\lambda_x &= -\sin\theta \sin\psi + \cos\theta \cos\psi \cos\varphi;\\
\lambda_y &= \sin\theta \cos\psi + \cos\theta \sin\psi \cos\varphi;\\
\lambda_z &= -\sin\varphi \cos\theta;\\
\mu_x &= -\cos\theta \sin\psi - \sin\theta \cos\psi \cos\varphi;\\
\mu_y &= \cos\theta \cos\psi - \sin\theta \sin\psi \cos\varphi;\\
\mu_z &= \sin\varphi \sin\theta;\\
\nu_x &= \sin\varphi \cos\psi;\\
\nu_y &= \sin\varphi \sin\psi;\\
\nu_z &= \cos\varphi
\end{aligned} \tag{7}$$

Замѣтимъ, что наиболѣе просто выражаются косинусы, содержащіе букву ν или значекъ z.

Предъидущія выраженія можно получить и непосредственно съ помощью формулы сферической тригонометріи $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$, гдѣ a, b, c стороны, а A, B, C противоположныя углы сферическаго треугольника, если обратимъ вниманіе на то, что плоскости $\xi\eta$ и $x_1 y_1$ наклонены другъ къ другу подъ угломъ φ, а прямая AN образуетъ углы: θ съ $A\eta$ и ψ съ Ay_1.

58. Движеніе поступательное. Если твердое тѣло движется, то хотя одна изъ шести координатъ его:

$$x_A,\ y_A,\ z_A,\ \psi,\ \varphi,\ \theta$$

измѣняется съ теченіемъ времени. Тогда равенства (1) служатъ, при ξ, η, ζ постоянныхъ, уравненіями прямого движенія, т. е. движенія любой точки (ξ, η, ζ) въ средѣ S; равенства же (4) при x, y, z постоянныхъ, будутъ уравненіями движенія обращеннаго, т. е. движенія любой точки (x, y, z) въ средѣ Σ.

Разсмотримъ сначала тотъ случай движенія твердаго тѣла, когда три Эйлеровыхъ угла не измѣняются; пусть

$$x_A = f_1(t); \quad y_A = f_2(t); \quad z_A = f_3(t);$$

$$\varphi = \text{const.}; \quad \psi = \text{const.}; \quad \theta = \text{const.};$$

Изъ (1) видно, что тогда уравненія движенія любой точки m тѣла будутъ:

$$x = f_1(t) + C_1; \quad y = f_2(t) + C_2; \quad z + f_3(t) + C_3;$$

гдѣ C_1, C_2, C_3 постоянныя. Для другой точки m_1 тѣла мы имѣли бы

$$x_1 = f_1(t) + C_1'; \quad y_1 = f_2(t) + C_2'; \quad z_1 = f_3(t) + C_3';$$

гдѣ C_1', C_2', C_3' постоянныя, всѣ, вообще говоря, отличныя отъ прежнихъ.

Вычитая соотвѣтственно полученныя уравненія, найдемъ:

$$x_1 - x = C_1' - C_1; \quad y_1 - y = C_2' - C_2; \quad z_1 - z = C_3' - C_3;$$

т. е. прямая, соединяющая любыя двѣ точки тѣла m и m_1, во все время движенія остается параллельною своему первоначальному направленію.

Такого рода движеніе носитъ названіе поступательнаго.

Траекторіи всѣхъ точекъ тѣла тождественны между собою, поэтому при изученіи поступательнаго движенія тѣла можно ограничиться разсмотрѣніемъ движенія одной какой либо точки его.

Направленіе осей $A\xi\eta\zeta$ въ тѣлѣ выберемъ такъ, чтобы

$$\varphi = \psi = \theta = 0;$$

тогда $\lambda_x = \mu_y = \nu_z = 1$, а прочіе косинусы нули. Въ такомъ случаѣ равенства (4) намъ даютъ, при $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ постоянныхъ:

$$\xi = -f_1(t) + \Gamma_1; \quad \eta = -f_2(t) + \Gamma_2; \quad \zeta = -f_3(t) + \Gamma_3.$$

Ясно, что обращенное движеніе также поступательное. Траекторіи обращеннаго движенія тождественны съ траекторіями прямого, только описываются движущимися точками въ противуположномъ направленіи.

59. Вращеніе тѣла около неподвижной точки. Движеніе параллельно плоскости. Положимъ теперъ, что

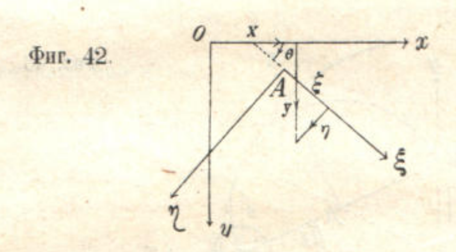
$$x_A = \text{const.};\quad y_A = \text{const.};\quad z_A = \text{const.}$$

$$\varphi = \alpha(t);\quad \psi = \beta(t);\quad \theta = \gamma(t).$$

Тогда точка A остается въ покоѣ, и движеніе такого рода называется **вращеніемъ** тѣла Σ около неподвижной точки или неподвижнаго полюса A. Очевидно, обращенное движеніе будетъ также вращеніемъ тѣла S около неподвижной точки A.

Изъ точки A какъ центра произвольнымъ радіусомъ въ обѣихъ средахъ построимъ по сферѣ; сферу въ Σ назовемъ σ, а сферу въ S назовемъ s. Ясно, что въ разсматриваемомъ случаѣ сфера σ будетъ двигаться по сферѣ s. Траекторія любой точки m тѣла кривая сферическая. Если прямая, соединяющая A съ разсматриваемою точкою m, встрѣчаетъ сферу σ въ точкѣ μ, то траекторія m подобна тракторіи точки μ; причемъ центромъ подобія служитъ точка A, а модулемъ подобія—отношеніе $\frac{Am}{A\mu}$. Поэтому при разсмотрѣніи вращенія твердаго тѣла мы можемъ ограничиться изученіемъ движенія сферы σ по сферѣ s или, какъ говорятъ, **движенія сферической фигуры по сферѣ**.

Фиг. 42.



Когда неподвижная точка A уходитъ на безконечность, тогда семейство концентрическихъ сферъ σ, а также и s, обращается въ семейство параллельныхъ плоскостей, и мы имѣемъ такъ называемое движеніе тѣла **параллельно плоскости**. Въ этомъ случаѣ движенія точекъ, лежащихъ на перпендикулярѣ къ семейству параллельныхъ плоскостей, тождественны между собою. Всѣ траекторіи лежатъ въ параллельныхъ плоскостяхъ, и можно ограничиться разсмотрѣніемъ движенія одной какой либо подвижной плоскости по соотвѣтственной неподвижной. Поэтому иначе такое движеніе называется движеніемъ **плоской фигуры въ ея плоскости**. Очевидно, обращенное движеніе обладаетъ тѣми же свойствами.

Уравненія движенія тѣла примутъ для разсматриваемаго случая видъ, отличный отъ уравненій вращательнаго движенія. Пусть за плоскость xOy взята нами одна изъ плоскостей, параллельно которымъ происходитъ движеніе. Соотвѣтственную подвижную плоскость примемъ за $A\xi\eta$. Тогда $A\zeta$ и Oz будутъ всегда параллельны. Положеніе осей $A\xi\eta$ въ плоскости xOy вполнѣ опредѣлится координатами x_A, y_A начала и угломъ θ оси $A\xi$ съ Ox (фиг. 42). Координаты x, y съ ξ, η связаны такими уравненіями:

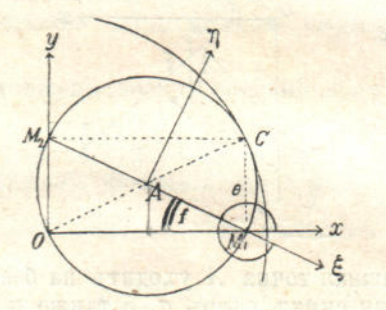
$$x = x_A + \xi\cos\theta - \eta\sin\theta\,;$$
(8)
$$y = y_A + \xi\sin\theta + \eta\cos\theta\,.$$

Движеніе фигуры вполнѣ опредѣлено, если намъ даны

$$x_A = f_1(t)\,;\quad y_A = f_2(t)\,;\quad \theta = f_3(t).$$

Тогда предъидущія уравненія представляютъ собою уравненія движенія любой точки фигуры; а чтобы получить уравненія движенія какой либо точки тѣла, лежащей внѣ плоскости xOy, надо къ предъидущимъ уравненіямъ прибавить слѣдующее:

$$z = \zeta\,.$$



Фиг. 43.

60. Кардановское движеніе прямое и обращенное. Въ видѣ примѣра разсмотримъ такое движеніе плоской фигуры, когда двѣ точки ея перемѣщаются по двумъ взаимно перпендикулярнымъ прямымъ. Примемъ эти прямыя за Ox и Oy (фиг. 43). Пусть точка $M_1(x_1\,y_1)$ движется по Ox, а точка $M_2(x_2\,y_2)$ по Oy. Неизмѣнное разстояніе между точками M_1 и M_2 назовемъ $2R$; удаленіе точки M_1 отъ начала координатъ не можетъ превышать $2R$; слѣд. мы можемъ положить

$$x_1 = 2R\cos f;\quad y_1 = 0;$$

гдѣ $f=f(t)$ произвольная функція времени. Такъ какъ

$$x_1^2 + y_2^2 = 4R^2,$$

то за уравненія движенія точки M_2 беремъ

$$x_2 = 0, \ y_2 = 2R \sin f.$$

За начало A подвижныхъ осей выбираемъ середину отрѣзка M_1M_2; въ такомъ случаѣ

$$x_A = R \cos f; \quad y_A = R \sin f.$$

Если $A\xi$ направимъ по AM_1, то

$$\theta = 2\pi - \angle M_2M_1O = 2\pi - \operatorname{arctg}(tg\, f) = 2\pi - f.$$

Уравненія (8) примутъ тогда видъ:

$$x = (R + \xi)\cos f + \eta \sin f;$$

$$y = (R - \xi)\sin f + \eta \cos f;$$

Если исключимъ f, то найдемъ уравненіе траекторіи:

$$[y\eta + x(\xi - R)]^2 + [\eta x - y(\xi + R)]^2 = [\xi^2 + \eta^2 - R^2]^2.$$

Это кривая второго порядка:

$$x^2\left\{(\xi - R)^2 + \eta^2\right\} - 4R\eta\, xy + y^2\left\{(\xi + R)^2 + \eta^2\right\} = [\xi^2 + \eta^2 - R^2]^2. \quad (9)$$

Изъ очевиднаго равенства:

$$4R^2\eta^2 - [\eta^2 + (\xi - R)^2]\,[\eta^2 + (\xi + R)^2] = -[\xi^2 + \eta^2 - R^2]^2,$$

заключаемъ, что траекторіей служитъ эллипсъ. Для точекъ, лежащихъ на кругѣ:

$$\xi^2 + \eta^2 = R^2,$$

проходящемъ чрезъ M_1, M_2 и O, эллипсъ превращается въ двѣ совпадающія прямыя:

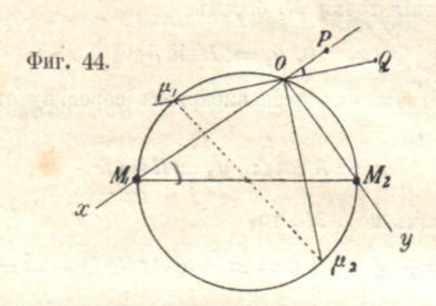
$$y(R + \xi) = \eta x.$$

Уравненіе (9) при ξ, η постоянныхъ даетъ траекторію прямого движенія; при x, y постоянныхъ оно становится уравненіемъ траекторіи движенія обращеннаго: получается кривая четвертаго порядка, называемая улиткой Паскаля.

Мы убѣдимся, однако, не изъ уравненія (9), а изъ разсмотрѣнія геометрическихъ особенностей обращеннаго движенія, что дѣйствительно кривая (9) будетъ улиткой Паскаля.

Въ обращенномъ движеніи (фиг. 44) стороны прямого угла xOy всегда проходятъ черезъ двѣ неподвижныя точки M_1 и M_2. Вершина прямого угла O описываетъ окружность, діаметромъ коей служитъ M_1M_2. Возьмемъ какую

Фиг. 44.



либо точку P на сторонѣ угла. Пусть $M_1P=\rho$; $OP=a$; $\angle M_2M_1P=\varphi$; тогда, очевидно, уравненіе траекторіи P будетъ:

$$\rho=a+M_1M_2\cos\varphi=a+2R\cos\varphi;$$

а это и есть уравненіе улитки Паскаля. Возьмемъ теперь точку Q, лежащую гдѣ либо не на сторонахъ угла xOy; проведемъ прямую $QO\mu_1$ и діаметръ $\mu_1\mu_2$. Уголъ POQ постояненъ, слѣд. и длины дугъ $M_1\mu_1$ и $M_1\mu_2$ постоянны, а потому точки μ_1 и μ_2 неподвижны. Такимъ образомъ мы вернулись къ уже разсмотрѣнному случаю точки P и слѣд. убѣждаемся, что траекторія любой точки Q будетъ улитка Паскаля.

Разсмотрѣнное нами прямое движеніе имѣетъ приложеніе въ приборѣ, называемомъ эллиптическимъ циркулемъ, а обращенное послужило основною идеею аппарата Леонардо да Винчи для вычерчиванія оваловъ.

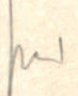
61. Центръ и ось конечнаго вращенія. Разсмотримъ два положенія плоской фигуры въ ея плоскости I и II (фиг. 45). Предполагается, что фигура можетъ перейти изъ одного положенія въ другое, не выходя изъ плоскости. Отмѣтимъ въ двухъ положеніяхъ соотвѣтственныя точки a, a_1; b, b_1; c, c_1. Опредѣлимъ точку K, отстоящую на равныхъ разстояніяхъ отъ a и a_1, b и b_1: $Ka=$ $=Ka_1$, $Kb=Kb_1$.

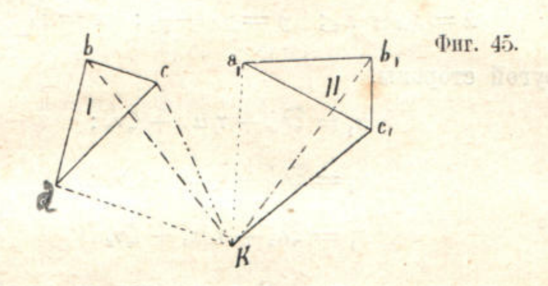
Тогда изъ равенства треугольниковъ легко убѣдиться, что

$$Kc=Kc_1 \text{ и } \angle aKa_1=bKb_1=\angle cKc_1.$$

Теперь ясно, что, если фигуру I повернуть около K на уголъ aKa_1, то она всѣми своими точками совпадетъ съ фигурою II. Точка K называется *центромъ конечнаго вращенія*. Центръ K уходитъ на безконечность лишь въ томъ случаѣ, когда aa_1 и bb_1 равны и параллельны; тогда фигура изъ положенія I въ положеніе II переводится поступательнымъ движеніемъ.

Изъ этихъ элементарныхъ соображенiй вытекаетъ, что всякое движенiе плоской фигуры въ ея плоскости, за исключенiемъ поступательнаго, можно представить себѣ какъ сплошной рядъ поворотовъ на безконечно малые углы вокругъ центровъ, соотвѣтствующихъ двумъ безконечно близкимъ положенiямъ фигуры.





Фиг. 45.

Сказанное нами легко распространить и на случай движенiя сферической фигуры по сферѣ. Повторимъ предъидущiя построенiя, замѣнивъ лишь прямыя линiи дугами большихъ круговъ. Тогда убѣдимся, что на сферѣ всегда существуютъ двѣ точки K_1 и K_2, для которыхъ $K_1a = K_1a_1$; $K_2a = K_2a_1$; $K_1b = K_1b_1$ и т. д. Эти двѣ точки лежатъ на концахъ дiаметра сферы K_1AK_2. Кромѣ того сферическiй или двугранный уголъ $aK_1K_2a_1 = bK_1K_2b_1 = cK_1K_2c_1$. Оставивъ точки K_1 и K_2 неподвижными, повернемъ сферу σ на общую величину двугранныхъ угловъ, тогда всѣ точки фигуры I совмѣстятся съ соотвѣтственными точками фигуры II, а слѣд. и тѣло изъ положенiя I переведется въ положенiе II поворотомъ на тотъ же уголъ около оси K_1AK_2. Ось эта называется осью конечнаго вращенiя.

Отсюда выводимъ, что всякое вращенiе твердаго тѣла можно разсматривать, какъ сплошной рядъ поворотовъ на безконечно малые углы около осей, соотвѣтствующихъ двумъ смежнымъ положенiямъ тѣла.

Къ вышеприведеннымъ заключенiямъ впослѣдствiи придемъ инымъ путемъ.

62. Общiй случай движенiя твердаго тѣла. Перейдемъ теперь къ общему случаю движенiя твердаго тѣла, когда всѣ шесть координатъ мѣняются съ временемъ:

$$x_A = f_1(t); \quad y_A = f_2(t); \quad z_A = f_3(t);$$

$$\varphi = f_4(t); \quad \psi = f_5(t); \quad \theta = f_6(t).$$

Построимъ оси $Ax_1y_1z_1$, имѣющiя съ подвижными общее начало A и параллельныя неподвижнымъ. Кромѣ средъ Σ и S пред-

ставимъ себѣ еще промежуточную среду $\mathfrak{S}$, неизмѣнно связанную съ этими осями. Координаты какой либо точки относительно новыхъ осей означимъ x_1, y_1, z_1. Тогда имѣемъ слѣдующія равенства—съ одной стороны:

$$x = x_A + x_1;\quad y = y_A + y_1;\quad z = z_A + z_1;$$

а съ другой стороны.

$$x_1 = \xi\lambda_x + \eta\mu_x + \zeta\nu_x;$$

(1) $$y_1 = \xi\lambda_y + \eta\mu_y + \zeta\nu_y;$$

$$z_1 = \xi\lambda_z + \eta\mu_z + \zeta\nu_z.$$

Мы видимъ, что среда Σ вращается въ средѣ $\mathfrak{S}$ около точки A, а среда $\mathfrak{S}$ движется въ средѣ S поступательно: всѣ точки ея перемѣщаются такъ, какъ полюсъ A. Такой способъ разсмотрѣнія движенія тѣла Σ называется разложеніемъ движенія. Здѣсь мы разложили движеніе Σ на поступательную часть—движеніе среды $\mathfrak{S}$ въ S и вращательную—движеніе Σ въ $\mathfrak{S}$.

Подобное разложеніе можетъ быть сдѣлано безчисленнымъ множествомъ способовъ: за полюсъ A можно взять любую точку тѣла Σ. Замѣтимъ, что отъ перемѣны полюса, вообще говоря, измѣнится поступательная часть движенія, т. е. движеніе среды $\mathfrak{S}$ въ S; но вращеніе Σ въ $\mathfrak{S}$, характеризуемое функціями: $\varphi = f_4(t)$; $\psi = f_5(t)$; $\theta = f_6(t)$, отъ того, какая точка взята за полюсъ, отнюдь не зависитъ.

Въ этомъ можно убѣдиться и аналитически. Приложимъ уравненія (1) къ какой либо точкѣ B тѣла Σ; тогда

$$x_B = x_A + \xi_B\lambda_x + \eta_B\mu_x + \zeta_B\nu_x;$$

$$y_B = y_A + \xi_B\lambda_y + \eta_B\mu_y + \zeta_B\nu_y;$$

$$z_B = z_A + \xi_B\lambda_z + \eta_B\mu_z + \zeta_B\nu_z.$$

Вычтемъ эти равенства изъ (1):

$$x = x_B + (\xi - \xi_B)\lambda_x + (\eta - \eta_B)\mu_x + (\zeta - \zeta_B)\nu_x;$$

$$y = y_B + (\xi - \xi_B)\lambda_y + (\eta - \eta_B)\mu_y + (\zeta - \zeta_B)\nu_y;$$

$$z = z_B + (\xi - \xi_B)\lambda_z + (\eta - \eta_B)\mu_z + (\zeta - \zeta_B)\nu_z.$$

Введемъ новыя подвижныя оси $B\xi_1\eta_1\zeta_1$, параллельныя преж-

нимъ $A\xi\eta\zeta$; тогда

$$\xi_1 = \xi - \xi_B;\quad \eta_1 = \eta - \eta_B;\quad \zeta_1 = \zeta - \zeta_B;$$

а слѣд. предъидущія уравненія даютъ:

$$x = x_B + \xi_1 \lambda_x + \eta_1 \mu_x + \zeta_1 \nu_x;$$

$$y = y_B + \xi_1 \lambda_y + \eta_1 \mu_y + \zeta_1 \nu_y;$$

$$z = z_B + \xi_1 \lambda_z + \eta_1 \mu_z + \zeta_1 \nu_z;$$

что по сравненію съ (1) и доказываетъ высказанное положеніе.

ГЛАВА IV.

Скорости точекъ твердаго тѣла.

63. Скорости для движенія поступательнаго. Дифференцируя по времени уравненія движенія (1) § 57 въ томъ предположеніи, что тѣло движется поступательно, найдемъ

$$x' = x_A'\,;\ y' = y_A'\,;\ z' = z_A'\,; \tag{1}$$

такъ какъ всѣ косинусы величины постоянныя. Отсюда заключаемъ, что въ движеніи поступательномъ скорости всѣхъ точекъ тѣла геометрически равны между собою и равны скорости полюса.

64. Скорости для движенія вращательнаго. Мгновенная угловая скорость. Мгновенная ось. Положимъ теперь, что тѣло вращается около неподвижнаго полюса A; въ такомъ случаѣ дифференцированіе выраженій (1) § 57 дастъ:

$$\begin{aligned} x' &= \xi\lambda_x' + \eta\mu_x' + \zeta\nu_x'\,; \\ y' &= \xi\lambda_y' + \eta\mu_y' + \zeta\nu_y'\,; \\ z' &= \xi\lambda_z' + \eta\mu_z' + \zeta\nu_z'\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Введемъ вмѣсто координатъ ξ, η, ζ координаты x, y, z съ помощью равенствъ (4) § 57; тогда найдемъ

$$\begin{aligned} x' &= L(x - x_A) + R_1(y - y_A) + Q(z - z_A)\,; \\ y' &= R(x - x_A) + M(y - y_A) + P_1(z - z_A)\,; \\ z' &= Q_1(x - x_A) + P(y - y_A) + N(z - z_A)\,; \end{aligned} \tag{3}$$

гдѣ

$$L = \lambda_x \lambda_x' + \mu_x \mu_x' + \nu_x \nu_x';$$

$$M = \lambda_y \lambda_y' + \mu_y \mu_y' + \nu_y \nu_y';$$

$$N = \lambda_z \lambda_z' + \mu_z \mu_y' + \nu_z \nu_z';$$

$$P = \lambda_y \lambda_z' + \mu_y \mu_z' + \nu_y \nu_z';$$

$$P_1 = \lambda_z \lambda_y' + \mu_z \mu_y' + \nu_z \nu_y'; \qquad (4)$$

$$Q = \lambda_z \lambda_x' + \mu_z \mu_x' + \nu_z \nu_x';$$

$$Q_1 = \lambda_x \lambda_z' + \mu_x \mu_z' + \nu_x \nu_z';$$

$$R = \lambda_x \lambda_y' + \mu_x \mu_y' + \nu_x \nu_y';$$

$$R_1 = \lambda_y \lambda_x' + \mu_y \mu_x' + \nu_y \nu_x'.$$

Если припомнимъ соотношенія (3) § 57, то, дифференцируя ихъ, убѣдимся, что

$$L = 0;\ M = 0;\ N = 0;$$

$$P + P_1 = 0;\ \ Q + Q_1 = 0;\ \ R + R_1 = 0.$$

Такимъ образомъ вмѣсто (2) получимъ окончательно такія формулы Эйлера:

$$x' = Q(z - z_A) - R(y - y_A) = \begin{vmatrix} Q & R \\ y - y_A & z - z_A \end{vmatrix};$$

$$y' = R(x - x_A) - P(z - z_A) = \begin{vmatrix} R & P \\ z - z_A & x - x_A \end{vmatrix}; \qquad (5)$$

$$z' = P(y - y_A) - Q(x - x_A) = \begin{vmatrix} P & Q \\ x - x_A & y - y_A \end{vmatrix}.$$

Если эти формулы перепишемъ въ видѣ:

$$x' = R(y_A - y) - Q(z_A - z);$$

$$y' = P(z_A - z) - R(x_A - x);$$

$$z' = Q(x_A - x) - P(y_A - y);$$

и сравнимъ тогда съ (17) § 11, то увидимъ, что скорость какой либо точки (x, y, z) тѣла представляетъ собою моментъ вектора съ координатами P, Q, R, приложеннаго къ точкѣ (x_A, y_A, z_A), вокругъ этой самой точки (x, y, z).

Векторъ Ω, координатами котораго служатъ P, Q, R, по своимъ измѣреніямъ, какъ нетрудно видѣть изъ (4), сравнимъ съ

$$\frac{1}{\text{един. врем.}}.$$

слѣд. однороденъ съ угловою скоростью (§ 47). Поэтому онъ называется мгновенною угловою скоростью. Эпитетъ „мгновенная" отмѣчаетъ, что названный векторъ характеризуетъ распредѣленіе скоростей по точкамъ вращающагося твердаго тѣла лишь для одного взятаго момента. Для другого какого либо момента векторъ Ω, вообще говоря, измѣнится и по величинѣ, и по направленію.

Основаніемъ, приложеннаго вектора Ω служитъ прямая, проходящая черезъ неподвижный полюсъ A:

$$\frac{x - x_A}{P} = \frac{y - y_A}{Q} = \frac{z - z_A}{R}. \tag{6}$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ эта же прямая представляетъ собою геометрическое мѣсто точекъ тѣла, находящихся въ мгновенномъ покоѣ; поэтому она называется мгновенною осью (сравн. § 61).

Скорость какой либо точки вращающагося тѣла, по выше сказанному, перпендикулярна къ плоскости, содержащей точку и мгновенную ось, а по величинѣ равна произведенію $\Omega\delta$, гдѣ δ кратчайшее разстояніе отъ точки до оси; притомъ для наблюдателя, стоящаго вдоль оси и смотрящаго на точку, скорость кажется направленною слѣва направо (§ 8).

Если векторъ Ω разложимъ на нѣсколько составляющихъ, ему эквивалентныхъ, напр. на P, Q, R, приложенныхъ къ A, то скорость какой либо точки тѣла равняется (§§ 24 и 26) геометрической суммѣ тѣхъ скоростей, которыя эта точка получила

бы отъ каждой составляющей въ отдѣльности. Относительно P, Q, R легко повѣрить сказанное на основаніи (5).

65. Выраженія для P, Q, R черезъ Эйлеровы углы. Количества P, Q, R представляютъ собою проекціи мгновенной угловой скорости Ω на оси координатъ; иначе это составляющіе вектора Ω по координатнымъ осямъ. Можно было бы непосредственно получить выраженія для нихъ съ помощью Эйлеровыхъ угловъ, если въ (4) подставить формулы (7) § 57. Во избѣжаніе длинныхъ сокращеній мы выведемъ эти формулы инымъ обходнымъ путемъ.

Предварительно найдемъ вспомогательныя формулы для производныхъ отъ косинусовъ $\lambda_x \ldots \nu_z$. Начало неподвижныхъ осей перенесемъ въ точку A; на положительныхъ половинахъ подвижныхъ осей $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$ возьмемъ три точки α, β, γ въ разстояніи отъ A равномъ единицѣ. Координатами абсолютными x, y, z, этихъ точекъ будутъ:

$$\text{для } \alpha - \lambda_x,\ \lambda_y,\ \lambda_z;$$

$$\text{для } \beta - \mu_x,\ \mu_y,\ \mu_z;$$

$$\text{для } \gamma - \nu_x,\ \nu_y,\ \nu_z.$$

Приложимъ выведенныя выраженія (5) къ этимъ точкамъ; тогда и получимъ искомыя формулы:

$$\frac{d\lambda_x}{dt} = Q\lambda_z - R\lambda_y;\quad \frac{d\lambda_y}{dt} = R\lambda_x - P\lambda_z;\quad \frac{d\lambda_z}{dt} = P\lambda_y - Q\lambda_x;$$

$$\frac{d\mu_x}{dt} = Q\mu_z - R\mu_y;\quad \frac{d\mu_y}{dt} = R\mu_x - P\mu_z;\quad \frac{d\mu_z}{dt} = P\mu_y - Q\mu_x;\quad (7)$$

$$\frac{d\nu_x}{dt} = Q\nu_z - R\nu_y;\quad \frac{d\nu_y}{dt} = R\nu_x - P\nu_z;\quad \frac{d\nu_z}{dt} = P\nu_y - Q\nu_x.$$

Выбравши три соотвѣтственныхъ уравненія изъ предъидущихъ, мы и сможемъ опредѣлить P, Q, R. Въ своемъ выборѣ будемъ руководствоваться замѣчаніемъ, сдѣланнымъ въ концѣ § 57.

Простѣйшій изъ косинусовъ ν_z; дифференцируемъ его и затѣмъ, пользуясь равенствами (7), а также выраженіями (7) § 57, сокращаемъ на $\sin\varphi$; тогда получаемъ:

$$P\sin\psi - Q\cos\psi = -\frac{d\varphi}{dt}. \quad (8)$$

Производныя отъ λ_z и μ_z содержатъ также P и Q. Останавливаемся, положимъ, на λ_z, тогда

$$\frac{d\lambda_z}{dt} = -\cos\varphi\cos\theta\,\varphi' + \sin\varphi\sin\theta\,.\,\theta' =$$

$$= \cos\varphi\cos\theta\,(P\sin\psi - Q\cos\psi) + \sin\theta\,(P\cos\psi + Q\sin\psi)\,.$$

Пользуясь (8) и затѣмъ сокращая на $\sin\theta$, найдемъ:

$$P\cos\psi + Q\sin\psi = \sin\varphi\,\frac{d\theta}{dt}\,.$$

Отсюда и изъ (8) имѣемъ:

(9)
$$P = \frac{d\theta}{dt}\sin\varphi\cos\psi - \frac{d\varphi}{dt}\sin\psi\,;$$

$$Q = \frac{d\theta}{dt}\sin\varphi\sin\psi + \frac{d\varphi}{dt}\cos\psi\,;$$

Для опредѣленія R можемъ теперь воспользоваться любымъ изъ равенствъ (7), въ которыя входитъ R; простѣйшими будутъ $\frac{d\nu_x}{dt}$ или $\frac{d\nu_y}{dt}$. Такимъ путемъ найдемъ:

(10)
$$R = \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi + \frac{d\psi}{dt}\,.$$

Производная φ' носитъ названіе **нутаціи**, а производная ψ' — **прецессіи**. Предъидущія равенства (9) и (10) на основаніи (7) § 57, а также фиг. 40 можно представить подъ такимъ видомъ:

$$\Omega\cos(\Omega x) = P = \theta'\cos(A\zeta,\ x) + \varphi'\cos(AN,\ x) + \psi'\cos(Az,\ x)\,;$$

$$\Omega\cos(\Omega y) = Q = \theta'\cos(A\zeta,\ y) + \varphi'\cos(AN,\ y) + \psi'\cos(Az_1,\ y);$$

$$\Omega\cos(\Omega z) = R = \theta'\cos(A\zeta,\ z) + \varphi'\cos(AN,\ z) + \psi'\cos(Az,\ z)\,.$$

Обозначенія здѣсь тѣ же, что и въ § 57.

Отсюда заключаемъ, что векторъ Ω можно разсматривать какъ геометрическую сумму трехъ векторовъ: вектора θ' по $A\zeta$, вектора

φ' по AN и вектора ψ' по Az_1:

$$(\Omega) = (\theta') + (\varphi') + (\psi').$$

Другими словами угловыя скорости θ', φ', ψ' служатъ составляющими мгновенной угловой скорости Ω по $A\zeta$, AN и Az_1.

Примѣръ: Положимъ, что вращеніе твердаго тѣла задано уравненіями:

$$\varphi = \alpha; \quad \psi = f(t); \quad \theta = kf(t):$$

гдѣ α и k постоянныя. Въ такомъ случаѣ

$$P = k \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos f \,.\, \frac{df}{dt}; \quad Q = k \,.\, \sin\alpha \sin f \,.\, \frac{df}{dt};$$

$$R = (1 + k\cos\alpha)\frac{df}{dt}.$$

66. Проекціи скорости точекъ вращающаго твердаго тѣла на подвижныя оси, неизмѣнно съ тѣломъ связанныя. Выраженія для p, q, r черезъ Эйлеровы углы. Если скорость какой либо точки вращающаго твердаго тѣла назовемъ w, то

$$w\cos(w\,\xi) = w\cos(w\,x)\,\lambda_x + w\cos(w\,y)\,\lambda_y + w\cos(w\,z)\,\lambda_z =$$
$$= x'\lambda_x + y'\lambda_y + z'\lambda_z.$$

Замѣнимъ здѣсь x', y', z' ихъ выраженіями изъ (5), а λ_x, λ_y, λ_z представимъ подъ видомъ (5) § 57; тогда имѣемъ:

$$w\cos(w\,\xi) = \{Q(z - z_A) - R(y - y_A)\}(\mu_y\nu_z - \mu_z\nu_y) +$$
$$+ \{R(x - x_A) - P(z - z_A)\}(\mu_z\nu_x - \mu_x\nu_z) +$$
$$+ \{P(y - y_A) - Q(x - x_A)\}(\mu_x\nu_y - \mu_y\nu_x).$$

А такое выраженіе легко сводится къ слѣдующему:

$$w\cos(w\,\xi) = (P\mu_x + Q\mu_y + R\mu_z)[(x - x_A)\nu_x + (y - y_A)\nu_y + (z - z_A)\nu_z] -$$
$$- (P\nu_x + Q\nu_y + R\nu_z)[(x - x_A)\mu_x + (y - y_A)\mu_y + (z - z_A)\mu_z].$$

Введемъ обозначенія:

$$p = P\lambda_x + Q\lambda_y + R\lambda_z = \Omega\cos(\Omega\,\xi);$$
$$q = P\mu_x + Q\mu_y + R\mu_z = \Omega\cos(\Omega\,\eta); \quad (11)$$
$$r = P\nu_x + Q\nu_y + R\nu_z = \Omega\cos(\Omega\,\zeta).$$

Тогда найдемъ по (4) § 57:

(12) $$w\cos(w\xi)=q\zeta-r\eta=\begin{vmatrix} q & r \\ \eta & \zeta \end{vmatrix}.$$

Подобнымъ образомъ получимъ еще:

$$w\cos(w\eta)=r\xi-p\zeta=\begin{vmatrix} r & p \\ \zeta & \xi \end{vmatrix};$$

(12′)

$$w\cos(w\zeta)=p\eta-q\xi=\begin{vmatrix} p & q \\ \xi & \eta \end{vmatrix}.$$

Уравненіе мгновенной оси въ относительныхъ координатахъ будетъ

(13) $$\frac{\xi}{p}=\frac{\eta}{q}=\frac{\zeta}{r}.$$

Выраженія для p, q, r черезъ Эйлеровы углы всего быстрѣе получатся изъ того соображенія, что мгновенную угловую скорость (§ 65) можно разсматривать, какъ геометрическую сумму угловыхъ скоростей φ' по AN, ψ' по Az_1 и θ' по $A\zeta$. Тогда, пользуясь фиг. 40, найдемъ:

(14) $$\begin{aligned} p&=-\psi'\sin\varphi\cos\theta+\varphi'\sin\theta;\\ q&=\psi'\sin\varphi\sin\theta+\varphi'\cos\theta;\\ r&=\psi'\cos\varphi+\theta'. \end{aligned}$$

Примѣръ: Когда

$$\varphi=\alpha;\quad \psi=f(t)\quad \theta=kf(t);$$

при α и k постоянныхъ —

$$p=-\sin\alpha\cos kf\,\frac{df}{dt};\quad q=\sin\alpha\sin kf\,\frac{df}{dt};\quad r=(\cos\alpha+k)\,\frac{df}{dt}.$$

67. Проекціи геометрической производной по времени отъ перемѣннаго вектора на оси неизмѣнно съ тѣломъ связанныя. Для проекціи геометрической производной $\dot{V}$ отъ какой-либо векторъ-функ-

ціи времени V на подвижное направленіе мы имѣемъ такое выраженіе:

$$\dot{V}\cos(\dot{V}U) = \frac{d}{dt}[V\cos(VU)] - V\dot{u}\cos(V\dot{u}),$$

гдѣ $\dot{u}$ поворотная скорость (§ 42) направленія U.

Воспользуемся этой формулой для вычисленія проекцій геометрической производной на подвижныя оси $A\xi\eta\zeta$. Начнемъ съ $A\xi$. Пусть проекціи вектора V на $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$ будутъ соотвѣтственно Ξ, Υ, Z. Поворотная скорость $\dot{u}$ въ настоящемъ случаѣ—это скорость точки α, лежащей на положительной половинѣ оси $A\xi$ въ разстояніи отъ A равномъ единицѣ. Проекція этой скорости на подвижныя оси означимъ $\dot{u}_\xi$, $\dot{u}_\eta$, $\dot{u}_\zeta$. Тогда имѣемъ:

$$\dot{V}\cos(\dot{V}\xi) = \frac{d\Xi}{dt} - (\Xi\dot{u}_\xi + \Upsilon\dot{u}_\eta + Z\dot{u}_\zeta).$$

Но по (12), замѣчая, что для точки α координаты $\xi = 1$, $\eta = \zeta = 0$, находимъ:

$$\dot{u}_\xi = 0; \quad \dot{u}_\eta = r; \quad \dot{u}_\zeta = -q.$$

Слѣд. предъидущее равенство обращается въ такое:

$$\dot{V}\cos(\dot{V}\xi) = \frac{d\Xi}{dt} + Zq - \Upsilon r. \tag{15}$$

А для остальныхъ осей:

$$\dot{V}\cos(\dot{V}\eta) = \frac{d\Upsilon}{dt} + \Xi r - Zp;$$

$$\dot{V}\cos(\dot{V}\zeta) = \frac{dZ}{dt} + \Upsilon p - \Xi q. \tag{15'}$$

Примѣнимъ полученныя формулы къ нахожденію выраженій производныхъ по времени отъ косинусовъ $\lambda_x \ldots \nu_z$ черезъ величины p, q, r.

На положительныхъ половинахъ неподвижныхъ осей Ax_1, Ay_1, Az_1 возьмемъ три точки a, b, c, лежащихъ въ разстояніи

отъ A равномъ единицѣ. Относительныя координаты этихъ точекъ будутъ

$$\text{для } a - \lambda_x,\ \mu_x,\ \nu_x; \quad \text{для } b - \lambda_y,\ \mu_y,\ \nu_y; \quad \text{для } c - \lambda_z,\ \mu_z,\ \nu_z.$$

Точки a, b, c неподвижны, слѣд. скорости ихъ, т. е. геометрическія производныя по времени отъ радіусовъ векторовъ, равняются нулю. Прилагая (15) къ точкѣ a, получимъ:

$$(16)\qquad 0 = \frac{d\lambda_x}{dt} + q\nu_x - r\mu_x;\ 0 = \frac{d\mu_x}{dt} + r\lambda_x - p\nu_x;\ 0 = \frac{d\nu_x}{dt} + p\mu_x - q\lambda_x.$$

Подобнымъ образомъ найдемъ и остальныя выраженія:

$$0 = \frac{d\lambda_y}{dt} + q\nu_y - r\mu_y;\quad 0 = \frac{d\mu_y}{dt} + r\lambda_y - p\nu_y;\quad 0 = \frac{d\nu_y}{dt} + p\mu_y - q\lambda_y;$$

(16′)

$$0 = \frac{d\lambda_z}{dt} + q\nu_z - r\mu_z;\quad 0 = \frac{d\mu_z}{dt} + r\lambda_z - p\nu_z;\quad 0 = \frac{d\nu_z}{dt} + p\mu_z - q\lambda_z.$$

68. Скорости точекъ твердаго тѣла, движущагося произвольнымъ образомъ. Винтовая ось. Дифференцируемъ равенства (1) § 57, предполагая, что всѣ шесть координатъ тѣла измѣняются съ временемъ. Находимъ,

$$(17)\qquad \begin{aligned} x' &= x_A' + \xi\lambda_x' + \eta\mu_x' + \zeta\nu_x'; \\ y' &= y_A' + \xi\lambda_y' + \eta\mu_y' + \zeta\nu_y'; \\ z' &= z_A' + \xi\lambda_z' + \eta\mu_z' + \zeta\nu_z'. \end{aligned}$$

Координаты ξ, η, ζ замѣняемъ координатами x, y, z: тогда совершенно такимъ же образомъ, какъ и въ § 64, приведемъ предъидущія уравненія къ виду:

$$(18)\qquad \begin{aligned} x' &= x_A' + Q(z - z_A) - R(y - y_A); \\ y' &= y_A' + R(x - x_A) - P(z - z_A); \\ z' &= z_A' + P(y - y_A) - Q(x - x_A). \end{aligned}$$

Сравнивая полученныя выраженія съ (27) § 18, мы видимъ, что скорость какой либо точки твердаго тѣла представляетъ собою

главный моментъ вокругъ этой точки системы приложенныхъ векторовъ, имѣющей своими координатами для полюса A:

$$P,\ Q,\ R,\ x_A',\ y_A',\ z_A';$$

т. е. характеризуемой для этого полюса своимъ главнымъ векторомъ Ω (P, Q. R) и главнымъ моментомъ $v_A(x_A', y_A', z_A')$.

Другимя словами, скорость любой точки (x, y, z) тѣла равняется геометричесѣой суммѣ скорости v_A и момента вектора Ω, приложеннаго къ A, вокругъ точки (x, y, z). Скорость v_A, общая всѣмъ точкамъ тѣла, носитъ названіе поступательной скорости, а моментъ вектора Ω по § 54 представляетъ собою ту вращательную скорость точки (x, y, z), которую она имѣла бы, если бы точка A была неподвижна. Прямая

$$\frac{x-x_A}{P}=\frac{y-y_A}{Q}=\frac{z-z_A}{R},$$

служащая основаніемъ вектора Ω сохраняетъ и здѣсь свое названіе мгновенной оси, только прибавляется названіе полюса—говорятъ: „мгновенная ось полюса A“.

Итакъ съ помощью формулъ (18) скорость любой точки твердато тѣла, движущагося произвольнымъ образомъ разлагается на поступательную и вращательную составляющія. Разложеніе это можно сдѣлать безчисленнымъ множествомъ способовъ, такъ какъ полюсомъ можетъ служить всякая точка твердаго тѣла. При замѣнѣ одного полюса другимъ поступательная скорость, вообще говоря, перемѣнится, но мгновенная угловая скорость Ω не измѣнитъ ни величины, ни направленія (§ 16). Останется также постоянною (§ 19) и проекція поступательной скорости на направленіе Ω.

$$v_A \cos(v_A\,\Omega)=\text{const.} \tag{19}$$

Среди безчисленнаго множества параллельныхъ между собою мгновенныхъ осей различныхъ полюсовъ выдѣляется одна центральная или винтовая ось. Точки, на ней лежащія, имѣютъ наименьшую возможную скорость, направленную при томъ вдоль оси (§§ 20 и 21). Уравненія винтовой оси по (29) § 21 будетъ такое:

$$\frac{x-a}{P}=\frac{y-b}{Q}=\frac{z-c}{R}, \tag{20}$$

гдѣ

$$a = x_A + \frac{1}{\Omega^2}(Qz_A' - Ry_A'); \quad b = y_A + \frac{1}{\Omega^2}(Rx_A' - Pz_A'');$$

(21) $$c = z_A + \frac{1}{\Omega^2}(Py_A' - Qx_A').$$

Названіе винтовой дано оси потому, что траекторіями точекъ тѣла служатъ винтовыя линіи, если только поступательная и угловая скорость тѣла остаются постоянными. Чтобы убѣдиться въ этомъ, возьмемъ винтовую ось за Oz, а полюсъ A за начало координатъ. Тогда

$$P = Q = 0; \quad R = \Omega = \text{const.}; \quad x_A' = y_A' = 0; \quad z_A' = v = \text{const.}$$

Уравненія (18) теперь даютъ;

$$x' = -y\Omega; \quad y' = x\Omega; \quad z' = v.$$

Интегрируя послѣднее уравненіе, найдемъ:

$$z = vt + z_0,$$

если значкомъ будемъ отмѣчать значенія перемѣнныхъ для $t = 0$.

Изъ первыхъ двухъ уравненій легко получить такія двѣ комбинаціи:

$$xx' + yy' = 0;$$

$$xy' - yx' = (x^2 + y^2)\Omega.$$

Послѣднему уравненію можемъ дать видъ:

$$\frac{\left(\frac{y}{x}\right)'}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \Omega$$

Интегрированіе такихъ преобразованныхъ уравненій даетъ:

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2;$$

$$\text{arctg.}\frac{y}{x} = \Omega t + \text{arctg.}\frac{y_0}{x_0}.$$

Если введемъ цилиндрическія координаты (§ 39), то получимъ

$$r = r_0; \quad \theta - \theta_0 = \Omega t;$$

и слѣд. уравненія траекторіи:

$$r = r_0; \quad z - z_0 = \frac{v}{\Omega}(\theta - \theta_0);$$

что и доказываетъ наше положеніе. Отношеніе $\frac{v}{\Omega}$, измѣряемое единицами длины, называется **параметромъ** винтовой оси. Произведеніе $2\pi\frac{v}{\Omega}$ носитъ названіе **шага** винтовой линіи. Изъ предъидущаго видимъ, что траекторіи точекъ тѣла въ разсматриваемомъ случаѣ винтовыя линіи одного и того-же шага.

Примѣръ: Пусть

$$x_A = -a\sin f(t); \quad y_A = a\cos f(t); \quad z_A = 0;$$

$$\varphi = \varphi_0; \quad \psi = f(t); \quad \theta = kf(t).$$

Тогда

$$P = k\sin\varphi_0\cos f \,.\, f'; \quad Q = k \,.\, \sin\varphi_0 \,.\, \sin f \,.\, f'; \quad R = (1 + k \,.\, \cos\varphi_0) \,.\, f';$$

$$\Omega^2 = f'^2(1 + k^2 + 2h\cos\varphi_0).$$

Уравненіе винтовой оси по (20) и (21):

$$\frac{x + D\sin f}{k\sin\varphi_0\cos f} = \frac{y - D\cos f}{k\sin\varphi_0\sin f} = \frac{z}{1 + k\cos\varphi_0}, \tag{22}$$

гдѣ

$$D = ak\,\frac{k + \cos\varphi_0}{1 + k^2 + 2k\cos\varphi_0}.$$

69. Проекціи скорости точекъ твердаго тѣла, движущагося произвольнымъ образомъ, на подвижныя оси. Умножая выраженія (18) соотвѣтственно на λ_x, λ_y, λ_z, складывая и преобразуя совершенно такъ, какъ въ § 66, получимъ для проекціи скорости какой либо точки тѣла на $A\xi$ такое выраженіе:

$$v\cos(v\,\xi) = x_A'\lambda_x + y_A'\lambda_y + z_A'\lambda_z + q\zeta - r\eta = v_A\cos(v_A\,\xi) + q\zeta - r\eta, \tag{23}$$

а для другихъ осей:

$$v\cos(v\eta)=x_A'\mu_x+y_A'\mu_y+z_A'\mu_z+r\xi-p\zeta=v_A\cos(v_A\eta)+r\xi-p\zeta;$$

$$v\cos(v\zeta)=x_A'\nu_x+y_A'\nu_y+z_A'\nu_z+p\eta-q\xi=v_A\cos(v_A\zeta)+p\eta-q\xi.$$

Уравненіе винтовой оси въ относительныхъ координатахъ будетъ:

$$\frac{\xi-\alpha}{p}=\frac{\eta-\beta}{q}=\frac{\zeta-\gamma}{r}, \tag{24}$$

гдѣ по (21) и (5) § 57:

$$\alpha=(a-x_A)\lambda_x+(b-y_A)\lambda_y+(c-z_A)\lambda_z=$$

$$=\frac{1}{\Omega^2}\{(Qz_A'-Ry_A')(\mu_y\nu_z-\mu_z\nu_y)+(Rx_A'-Pz_A')(\mu_z\nu_x-\nu_z\mu_x)+$$

$$+(Py_A'-Qx_A')(\mu_x\nu_y-\mu_y\nu_x)\}=\frac{1}{\Omega^2}\{q(x_A'\nu_x+y_A'\nu_y+z_A'\nu_z)-$$

$$-r(x_A'\mu_x+y_A'\mu_y+z_A'\mu_z)\}=$$

$$=\frac{1}{\Omega^2}[q\,v_A\cos(v_A\zeta)-r\,v_A\cos(v_A\eta)];$$

$$\beta=\frac{1}{\Omega^2}[r\,v_A\cos(v_A\xi)-p\,v_A\cos(v_A\zeta)];$$

$$\gamma=\frac{1}{\Omega^2}[p\,v_A\cos(v_A\eta)-q\,v_A\cos(v_A\xi)]. \tag{25}$$

Примѣръ: Для того движенія, которое было разсмотрѣно въ концѣ предъидущаго параграфа, имѣемъ:

$$p=-\sin\varphi_0\cos kf.f';\quad q=\sin\varphi_0\sin kf.f';\quad r=(\cos\varphi_0+k)f';$$

и уравненіе винтовой оси:

$$\frac{\xi+d\sin kf}{-\sin\varphi_0\cos kf}=\frac{\eta+d\cos kf}{\sin\varphi_0\sin kf}=\frac{\zeta}{\cos\varphi_0+k}; \tag{26}$$

гдѣ

$$d = a\,\frac{1 + k\cos\varphi_0}{1 + k^2 + 2k\cos\varphi_0}.$$

70. Скорости точекъ тѣла, движущагося параллельно плоскости. Мгновенный центръ. Обратимся теперь къ тому частному случаю движенія твердаго тѣла, когда постоянная въ выраженіи (19) во все время движенія равняется нулю, т. е. скорости точекъ тѣла перпендикулярны къ неподвижному направленію. Очевидно, тогда мы имѣемъ движеніе, разсмотрѣнное въ § 59 и называемое движеніемъ параллельно плоскости. Скорости точекъ на винтовой оси равняются теперь нулю, и слѣд. въ каждой подвижной плоскости одна изъ точекъ, пересѣченіе винтовой оси съ плоскостью, находится въ мгновенномъ покоѣ. Такая точка носитъ названіе мгновеннаго центра. Выраженія для скоростей точекъ твердаго тѣла въ разсматриваемомъ движеніи легко получить изъ (18). Беремъ направленія осей Oz и $A\zeta$ по перпендикуляру къ семейству параллельныхъ плоскостей; тогда по § 59 и фиг. 42 должны положить

$$z_A' = 0;\quad P = Q = 0;\quad R = \frac{d\theta}{dt};$$

$$p = q = 0;\quad r = \frac{d\theta}{dt};$$

$$\lambda_x = \cos\theta;\quad \lambda_y = \sin\theta;\quad \mu_x = -\sin\theta;\quad \mu_y = \cos\theta;$$

$$\lambda_z = \mu_z = \nu_x = \nu_y = 0;\quad \nu_z = 1.$$

Такимъ образомъ для неподвижныхъ осей имѣемъ:

$$x' = x_A' - (y - y_A)\,\theta';\quad y' = y_A' + (x - x_A)\,\theta';\quad z' = 0. \tag{27}$$

А для подвижныхъ:

$$v\cos(v\,\xi) = x_A'\cos\theta + y_A'\sin\theta - \eta\theta';$$

$$v\cos(v\,\eta) = -\,x_A'\sin\theta + y_A'\cos\theta + \xi\theta';$$

$$v\cos(v\,\zeta) = 0. \tag{28}$$

Мгновенный центръ для какой либо плоскости опредѣлится, если станемъ искать точку, находящуюся въ мгновенномъ покоѣ.

Приравнивая нулю лѣвыя части предъидущихъ выраженій, получаемъ для искомой точки такія абсолютныя координаты x_c, y_c:

$$(29) \qquad x_c = x_A - \frac{1}{\theta'} y_A' = x_A + a; \quad y_c = y_A + \frac{1}{\theta'} x_A' = y_A + b;$$

а относительными координатами ξ_c, η_c, служатъ:

$$\xi_c = \frac{1}{\theta'}(x_A' \sin\theta - y_A' \cos\theta) = b \sin\theta + a\cos\theta;$$

$$(30) \qquad \eta_c = \frac{1}{\theta'}(x_A' \cos\theta + y_A' \sin\theta) = b\cos\theta - a\sin\theta.$$

Съ помощью этихъ выраженій можемъ формулы (27) и (28) переписать такъ:

$$x' = -(y - y_c)\theta'; \quad y' = (x - x_c)\theta';$$

$$v\cos(v\xi) = -(\eta - \eta_c)\theta'; \quad v\cos(v\eta) = (\xi - \xi_c)\theta'.$$

Мы видимъ по (5) и (12), что скорости точекъ плоской фигуры таковы, какъ будто эта фигура вращалась около мгновеннаго центра, какъ около неподвижнаго полюса (срав. § 61). Отсюда вытекаетъ, что прямая, соединяющая мгновенный центръ съ какою либо точкою фигуры, нормальна къ траекторіи этой точки.

Примѣръ: Въ Кардановскомъ движеніи (§ 60) получаются такія выраженія для координатъ мгновеннаго центра.

$$(31) \qquad x_c = 2R\cos f; \quad y_c = 2R\sin f;$$

$$(32) \qquad \xi_c = R\cos 2f; \quad \eta_c = R\sin 2f.$$

ГЛАВА V.

Центроиды. Аксоиды.

71. Центроиды. Мы уже видѣли раньше (§ 70), что движенiе плоской фигуры въ ея плоскости можно разсматривать какъ сплошной рядъ поворотовъ на безконечно малые углы вокругъ соотвѣтственныхъ мгновенныхъ центровъ. Мгновенный центръ для даннаго движенiя въ различные моменты времени совпадаетъ съ различными точками какъ неподвижной, такъ и подвижной плоскости, слѣд. онъ движется въ обѣихъ плоскостяхъ. Траекторiи мгновеннаго центра въ неподвижной и подвижной плоскостяхъ называются соотвѣтственно неподвижной и подвижной центроидами. Уравненiями движенiя мгновеннаго центра въ этихъ плоскостяхъ служатъ равенства (29) и (30) § 70; поэтому уравненiя центроидъ найдутся черезъ исключенiе времени изъ правыхъ частей названныхъ равенствъ. Подвижная центроида вмѣстѣ съ движущеюся фигурою перемѣщается по неподвижной плоскости. Можно показать, что подвижная центроида катится по неподвижной; иначе, во все время движенiя обѣ кривыя касаются другъ друга. Кромѣ того, катанiе это не сопровождается скольженiемъ, т. е. общая точка кривыхъ за одинъ и тотъ же промежутокъ времени проходитъ по обѣимъ кривымъ одно и то же разстоянiе.

Означимъ длины дугъ неподвижной и подвижной центроидъ черезъ s и σ; длина дуги, пройденной мгновеннымъ центромъ по той и другой траекторiи за промежутокъ времени dt пусть будетъ ds и $d\sigma$; причемъ направленiя ds и $d\sigma$ совпадаютъ съ направленiемъ скорости мгновеннаго центра по соотвѣтственной кривой. Тогда

$$dx_c = x_c'\,dt = ds\cos(ds,\,x)\,;\quad dy_c = y_c'\,dt = ds\cos(ds,\,y);$$

$$d\xi_c = \xi_c'\,dt = d\sigma\cos(d\sigma,\,\xi)\,;\quad d\eta_c = \eta_c'\,dt = d\sigma\cos(d\sigma,\,\eta).$$

Но по (30) § 70:

$$d\xi_c = db\,.\sin\theta + da\,.\cos\theta + (b\,.\cos\theta - a\,.\sin\theta)\,\theta'\,dt\,;$$

$$d\eta_c = db\,.\cos\theta - da\,.\sin\theta - (b\,.\sin\theta + a\,.\cos\theta)\,\theta'\,dt\,.$$

Замѣняя a и b ихъ выраженіями изъ (29) того же § 70, получимъ:

$$d\xi_c = (dx_A + da)\cos\theta + (dy_A + db)\sin\theta = dx_c\cos\theta + dy_c\sin\theta\,;$$

$$d\eta_c = -(dx_A + da)\sin\theta + (dy_A + db)\cos\theta = -dx_c\sin\theta + dy_c\cos\theta.$$

Пусть въ разсматриваемый моментъ подвижныя оси параллельны неподвижнымъ, т. е. $\theta = 0$; тогда:

$$d\xi_c = dx_c\,;\quad d\eta_c = dy_c\,.$$

Возвышая въ квадратъ и складывая, получимъ:

$$d\sigma^2 = ds^2\,;$$

и слѣд. по раздѣленіи на $d\sigma = ds$: $\dfrac{d\xi_c}{d\sigma} = \dfrac{dx_c}{ds}$; $\dfrac{d\eta_c}{d\sigma} = \dfrac{dy_c}{ds}$;

или:

$$\cos(d\sigma,\ \xi) = \cos(ds,\ x);\quad \cos(d\sigma,\ \eta) = \cos(ds,\ y)\,.$$

Такимъ образомъ высказанное положеніе доказано, ибо оси по условію параллельны.

Если вмѣсто прямого движенія станемъ разсматривать обращенное, то центроиды только помѣняются ролями: неподвижная станетъ подвижною и наоборотъ.

Примѣры: 1) Для Кардановскаго движенія изъ формулъ (31) и (32) § 70 находимъ такія уравненія центроидъ—неподвижной:

$$x_c^2 + y_c^2 = 4R^2,$$

и подвижной:

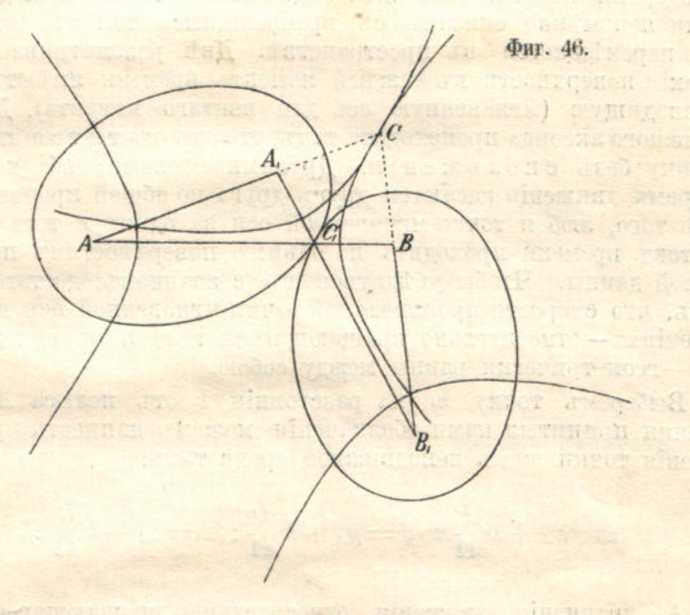
$$\xi_c^2 + \eta_c^2 = R^2.$$

Обѣ кривыя окружности; неподвижная въ два раза больше; подвижная лежитъ внутри неподвжной.

Эти заключенія мы могли бы вывести и элементарнымъ путемъ, пользуясь тѣмъ замѣчаніемъ, что прямая, соединяющая мгновенный центръ съ какою либо точкою подвижной фигуры нормальна къ траекторіи этой точки.

Мы знаемъ (§ 60), что Кардановское движеніе получается тогда, когда двѣ точки фигуры M_1 и M_2 (фиг. 43) движутся по двумъ взаимноперпендикулярнымъ прямымъ Ox и Oy; разстояніе $M_1 M_2 = 2R$. Возстановивъ перпендикуляры къ Ox и Oy въ точкахъ M_1 и M_2, мы получимъ мгновенный центръ C, какъ ихъ пересѣченіе. Такъ какъ разстояніе $OC = M_1 M_2 = 2R$, то, очевидно, неподвижная центроида окружность центра O и радіуса $2R$. Уголъ $M_1 C M_2$ прямой, слѣд. подвижная центроида окружность, построенная на $M_1 M_2$, какъ на діаметрѣ.

2) Пусть имѣемъ антипараллелограммъ $AA_1 B_1 B$ (фиг. 46); т. е. четыреугольникъ, противоположныя стороны котораго равны и пересѣкаются. Укрѣпимъ неподвижно одну изъ сторонъ, напр. большую AB; тогда другая



Фиг. 46.

большая $A_1 B_1$ можетъ двигаться. Найдемъ для этого движенія центроиды. Траекторіи точекъ A_1 и B_1 окружности центровъ A и B, слѣд. искомый центръ C лежитъ на пересѣченіи прямыхъ AA_1 и BB_1. Изъ равенства треугольниковъ ACB и $A_1 C B_1$ слѣдуетъ:

$$CA - CB = AA_1 = \text{const.},$$

поэтому неподвижная центроида гипербола съ фокусами въ A и B.

Далѣе

$$CB_1 - CA_1 = BB_1 = \text{const.},$$

слѣд. подвижная центроида также гипербола, равная предъидущей и имѣющая фокусами точки A_1 и B_1.

Если закрѣпимъ неподвижно меньшую сторону AA_1, то легко видѣть, что для движенія по плоскости стороны BB_1 центроидами служатъ два равныхъ между собою эллипса съ фокусами въ A и A_1, въ B и B_1.

72. Аксоиды для вращательнаго движенія. Когда твердое тѣло вращается около неподвижнаго полюса A, то мгновенная ось (§ 64), перемѣщаясь какъ въ самомъ тѣлѣ, такъ и въ неподвижной средѣ, описываетъ въ этихъ средахъ двѣ коническія поверхности, носящія названія подвижного и неподвижнаго аксоидовъ. Уравненія этихъ поверхностей найдутся, если исключить время изъ двухъ уравненій (6) § 64—для неподвижнаго аксоида, или изъ двухъ уравненій (13) § 66—для подвижного. Аксоидъ подвижной, будучи неизмѣнно связанъ съ вращающимся тѣломъ, вмѣстѣ съ нимъ перемѣщается въ пространствѣ. Двѣ разсматриваемыя коническія поверхности въ каждый моментъ времени имѣютъ общую производящую (мгновенную ось для взятаго момента). Движеніе подвижного аксоида происходитъ такъ, что онъ катится по неподвижному безъ скольженія. Другими словами, оба конуса во все время движенія касаются другъ друга по общей производящей; кромѣ того, любая точка мгновенной оси за одинъ и тотъ же промежутокъ времени проходитъ по обѣимъ поверхностямъ путь одинаковой длины. Чтобы убѣдиться въ сказанномъ, достаточно показать, что скорости произвольной точки мгновенной оси въ двухъ движеніяхъ—относительно вращающагося тѣла и въ неподвижной средѣ—геометрически равны между собою.

Выберемъ точку m на разстояніи k отъ полюса A; тогда, сохраняя принятыя нами обозначенія, можемъ написать уравненія движенія точки m въ неподвижной средѣ такъ:

$$x = x_A + k\frac{P}{\Omega}\,;\quad y = y_A + k\frac{Q}{\Omega}\,;\quad z = z_A + k\frac{R}{\Omega}\,.$$

А уравненія движенія относительно вращающагося тѣла будутъ:

$$\xi = k\frac{p}{\Omega}\,;\quad \eta = k\frac{q}{\Omega}\,;\quad \zeta = k\frac{r}{\Omega}\,.$$

Означимъ скорости точки m въ неподвижной средѣ и въ тѣлѣ соотвѣтственно v и w; тогда, дифференцируя предъидущія уравненія, получимъ:

$$v\cos(v,x) = x' = \frac{k}{\Omega^2}(\Omega P' - \Omega P');\quad v\cos(v,y) = y' = \frac{k}{\Omega^2}(\Omega Q' - Q\Omega')\,;$$

$$v\cos(v,z)=z'=\frac{k}{\Omega^2}(\Omega R'-R\Omega');$$

$$w\cos(w,\xi)=\xi'=\frac{k}{\Omega^2}(\Omega p'-p\Omega');\ \ w\cos(w,\eta)=\eta'=\frac{k}{\Omega^2}(\Omega q'-q\Omega');$$

$$w\cos(w,\zeta)=\zeta'=\frac{k}{\Omega^2}(\Omega r'-r\Omega').$$

Мы уже имѣли въ (11) § 66:

$$p=P\lambda_x+Q\lambda_y+R\lambda_z.$$

Дифференцируя по времени, находимъ:

$$p'=P'\lambda_x+Q'\lambda_y+R'\lambda_z+(P\lambda_x'+Q\lambda_y'+R\lambda_z').$$

Выраженіе, стоящее въ скобкахъ, обращается въ нуль по (7) § 65, слѣдовательно

$$p'=P'\lambda_x+Q'\lambda_y+R'\lambda_z.$$

Пользуясь выраженіями для p и p', можемъ написать:

$$w\cos(w,\xi)=\frac{k}{\Omega^2}(\Omega P'-P'\Omega)\lambda_x+\frac{k}{\Omega^2}(\Omega Q'-Q\Omega')\lambda_y+$$

$$+\frac{k}{\Omega^2}(\Omega R'-R\Omega')\lambda_z=x'\lambda_x+y'\lambda_y+z'\lambda_z=v\cos(v\xi).$$

Подобнымъ образомъ:

$$w\cos(w,\eta)=v\cos(v,\eta);\ \ w\cos(w,\zeta)=v\cos(v,\zeta);$$

что и доказываетъ требуемое.

Примѣръ: Для вращенія, заданнаго уравненіями

$$x_A=y_A=z_A=0;\ \ \varphi=\alpha,\ \ \psi=f(t);\ \ \theta=kf(t),$$

гдѣ α и k постоянныя, получаемъ такія уравненія мгновенной оси въ абсолютныхъ и относительныхъ координатахъ:

$$\frac{x}{k \sin\alpha \cos f} = \frac{y}{k \sin\alpha \sin f} = \frac{z}{1 + k\cos\alpha};$$

$$\frac{\xi}{-\sin\alpha \cos kf} = \frac{\eta}{\sin\alpha \sin kf} = \frac{\zeta}{\cos\alpha + k}.$$

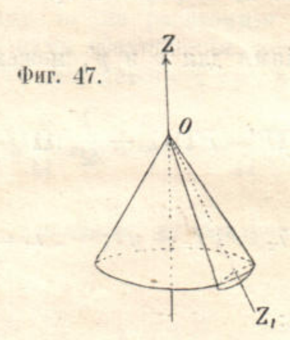
Исключая время, находимъ уравненія аксоидовъ неподвижнаго и подвижнаго:

$$\frac{x^2 + y^2}{k^2 \sin^2\alpha} - \frac{z^2}{(1 + k\cos\alpha)^2} = 0;$$

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{\sin^2\alpha} - \frac{\zeta^2}{(k + \cos\alpha)^2} = 0.$$

Оба аксоида—конусы вращенія. Углы растворенія конусовъ и расположеніе ихъ другъ относительно друга могутъ быть самые разнообразные. Напр. если станемъ разсматривать вращеніе земли, пренебрегая нутаціей и принимая въ соображеніе лишь суточное вращеніе и прецессію, то расположеніе аксоидовъ будетъ такое, какъ показано на фиг. 47. Здѣсь O центръ земли, OZ направлена по оси эклиптики къ сѣверному полюсу эклиптики; OZ_1 идетъ къ южному полюсу земли; $\angle ZOZ_1 = \pi - \delta$, гдѣ δ наклоненіе эклиптики къ экватору и равно приблизительно $23^\circ 27' 17''$; уголъ растворенія подвижнаго аксоида равняется приблизительно $0''01$.

Фиг. 47.



73. Полный изгибъ поверхности. Закручиваніе поверхности. Прежде чѣмъ перейти къ разсмотрѣнію аксоидовъ для общаго случая движенія твердаго тѣла, остановимся на нѣкоторыхъ теоремахъ, относящихся къ теоріи поверхностей.

Возьмемъ на данной поверхности S произвольную точку M. Касательную плоскость къ поверхности S въ этой точкѣ назовемъ P. Отступимъ отъ M по S въ произвольномъ направленіи MM' къ точкѣ M'. Тогда, чтобы получить касательную плоскость P' къ данной поверхности въ точкѣ M',

намъ надо будетъ плоскость P повернуть на нѣкотоый уголъ ω около оси, совпадающей съ линіею пересѣченія плоскостей P и P'.

Пусть уравненіе данной поверхности:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Частныя производныя отъ F по x, y, z для точки M означимъ F_x, F_y, F_z, а для M' черезъ F_x', F_y', F_z'. Тогда уголъ поворота ω, какъ уголъ между нормалями N и N' къ S въ точкахъ M и M', найдется изъ равенства:

$$\cos\omega = \frac{F_x F_x' + F_y F_y' + F_z F_z'}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\,\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}}.$$

Направленіе же оси вращенія Ω опредѣляется косинусами:

$$\cos(\Omega x) = \frac{1}{\Delta}(F_y F_z' - F_z F_y');$$

$$\cos(\Omega y) = \frac{1}{\Delta}(F_z F_x' - F_x F_z')$$

$$\cos(\Omega z) = \frac{1}{\Delta}(F_x F_y' - F_y F_x');$$

гдѣ

$$\Delta = +\sqrt{(F_y F_z' - F_z F_y')^2 + (F_z F_x' - F_x F_z')^2 + (F_x F_y' - F_y F_x')^2}$$

Ось эта перпендикулярна къ плоскости параллельной нормалямъ N и N' и направлена въ ту сторону, откуда видимъ нормаль N налѣво, а N' направо.

Изъ выраженія для $\cos\omega$ имѣемъ:

$$\sin^2\omega \,.\, \delta^2 \delta'^2 = \Delta^2,$$

если

$$\delta^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2; \quad \delta'^2 = F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2.$$

Условимся называть **полнымъ изгибомъ** поверхности **въ точкѣ** M **по направленію** MM' предѣлъ отношенія

$$\frac{\omega}{MM'}$$

при MM' безконечно маломъ. Тогда, если MM' означимъ ds, а полный изгибъ поверхности по направленію ds черезъ θ, то изъ предъидущей формулы для $\sin\omega$, получимъ:

$$\theta^2 = \frac{1}{\delta^4}\left\{\left(F_y\frac{dF_z}{ds} - F_z\frac{dF_y}{ds}\right)^2 + \left(F_z\frac{dF_x}{ds} - F_x\frac{dF_z}{ds}\right)^2 + \left(F_x\frac{dF_y}{ds} - F_y\frac{dF_x}{ds}\right)^2\right\}.$$

За направленіе θ, оси полнаго изгиба, мы принимаемъ направленіе предѣльнаго положенія оси Ω, слѣд.

$$\cos(\theta, x) = \frac{1}{\theta \cdot \delta^2}\left(F_y \frac{dF_z}{ds} - F_z \frac{dF_y}{ds}\right);$$

$$\cos(\theta, y) = \frac{1}{\theta \cdot \delta^2}\left(F_z \frac{dF_x}{ds} - F_x \frac{dF_z}{ds}\right);$$

$$\cos(\theta, z) = \frac{1}{\theta \cdot \delta^2}\left(F_x \frac{dF_y}{ds} - F_y \frac{dF_x}{ds}\right);$$

здѣсь для θ берется знакъ положительный.

Если уравненіе поверхности дано въ явномъ видѣ:

$$\varphi(x, y) - z = 0,$$

то при обыкновенныхъ обозначеніяхъ:

$$\theta \cos(\theta, x) = \frac{1}{1 + p^2 + q^2} \frac{dq}{ds};$$

$$\theta \cos(\theta, y) = \frac{-1}{1 + p^2 + q^2} \frac{dp}{ds};$$

(1) $$\theta \cos(\theta, z) = \frac{1}{1 + p^2 + q^2}\left(p \frac{dq}{ds} - q \frac{dp}{ds}\right).$$

Полный изгибъ поверхности можно разсматривать какъ угловую скорость при движеніи касательной плоскости по поверхности, разсчитанную только на единицу длины, а не на единицу времени. Эту угловую скорость разложимъ на двѣ составляющія — по тому направленію ds, по которому мы отступали, и по направленію n, къ нему перпендикулярному. Послѣднее направленіе лежитъ въ касательной плоскости, такъ какъ изъ предъидущихъ выраженій видно, что ось θ лежитъ сама въ касательной плоскости.

Составляющую по n назовемъ чистымъ изгибомъ поверхности и означимъ θ_n. Легко убѣдиться, что θ_n ничто иное, какъ кривизна нормальнаго сѣченія поверхности, проведеннаго черезъ ds. Поэтому останавливаться на изученіи свойствъ этой величины мы не станемъ.

Другую составляющую, по направленію ds, назовемъ закручиваніемъ поверхности по данному направленію и означимъ θ_t. Умножая соотвѣтственно выраженія (1) на $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ и складывая, получимъ:

(2) $$\theta_t = (1 + p^2 + q^2)^{-1}\left[\frac{dq}{ds} \cdot \frac{dx}{ds} - \frac{dp}{ds} \cdot \frac{dy}{ds} + \left(p \frac{dq}{ds} - q \frac{dp}{ds}\right)\frac{dz}{ds}\right].$$

Н **74. Закручиваніе линейчатой поверхности вдоль производящей.** Предполагая, что данная поверхность линейчатая, разберемъ, какъ измѣняется полный изгибъ поверхности вдоль какой либо производящей. Возьмемъ эту производящую за Ox. Очевидно, тогда

$$p=0;\ \frac{dx}{ds}=1;\ \frac{dy}{ds}=\frac{dz}{ds}=0;$$

кормѣ того $\theta_n=0$, такъ какъ касательная плоскость можетъ лишь вращаться около производящей. Производная $p=0$ для любой точки вдоль Ox, слѣд. и $r=0$. Пользуясь (2), получимъ въ настоящемъ случаѣ

$$\theta_t=\frac{s}{1+q^2}. \tag{3}$$

Если наша поверхность развертывающаяся, то изъ дифференціальнаго уравненія ея:

$$rt-s^2=0,$$

при $r=0$, вытекаетъ, что для всякой точки производящей $s=0$, а потому по (3) и $\theta_t=0$, т. е. плоскость, касательная къ развертывающейся поверхности въ какой либо точкѣ на производящей, касается поверхности вдоль всей производящей.

Положимъ теперь, что данная поверхность косая. Возьмемъ начало координатъ на линіи съуженія поверхности, а Oy направимъ по кратчайшему разстоянію между производящею Ox и смежною; слѣд. плоскость xOy будетъ теперь касательною къ поверхности.

Пусть уравненія любой производящей:

$$z=ax+\alpha;\quad y=bx+\beta; \tag{4}$$

гдѣ a, b, α, β функціи нѣкотораго параметра λ. Если производящей, совпадающей съ Ox, соотвѣтствуетъ значеніе параметра λ_0, то для него $a=b=$ $=\alpha=\beta=0$.

Уравненія проекціи на xOy смежной производящей:

$$y=(b+b'd\lambda)\,x+\beta+\beta'd\lambda;$$

запятою обозначаемъ производныя по λ.

По условію Oy совпадаетъ съ кратчайшимъ разстояніемъ между Ox и смежною производящею, слѣд. изъ предъидущаго выраженія для $\lambda=\lambda_0$:

$$b'=0.$$

Первое изъ уравненій (4) можно разсматривать, какъ уравненіе самой косой поверхности, если представимъ себѣ, что параметръ λ выраженъ, какъ функція отъ x и y, изъ второго уравненія. Поэтому изъ перваго

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p=a+(a'x+\alpha')\,\frac{\partial\lambda}{\partial x};$$

но изъ второго:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = -\frac{b}{b'x+\beta'}$$

слѣдовательно

$$p = a - b\,\frac{a'x+\alpha'}{b'x+\beta'}.$$

Дифференцируя послѣднее равенство по y, находимъ:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = s = \left\{ a' - b'\,\frac{a'x+\alpha'}{b'x+\beta'} - b\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{a'x+\alpha'}{b'x+\beta'}\right)\right\}\frac{\partial\lambda}{\partial y};$$

но

$$1 = (b'x+\beta')\,\frac{\partial\lambda}{\partial y},$$

слѣдовательно

$$s = \frac{a'\beta'-b'\alpha'}{(b'x+\beta')^2} - \frac{b}{b'x+\beta'}\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{a'x+\alpha'}{b'x+\beta'}\right).$$

Даемъ λ частное значеніе λ_0; тогда видимъ по предъидущему, что для всѣхъ точекъ производящей Ox производная s принимаетъ постоянное значеніе:

$$s = \left(\frac{a'}{\beta'}\right)_{\lambda=\lambda_0} = \frac{1}{\chi};$$

постоянная χ носитъ названіе параметра распредѣленія. Можно было бы показать, что χ равняется предѣлу отношенія кратчайшаго разстоянія между смежными производящими: $\beta' d\lambda$, къ тангенсу угла между ними: $a' d\lambda$.

Означимъ черезъ φ уголъ нормали къ поверхности въ какой либо точкѣ на Ox съ Oz, или, что то же, уголъ касательной плоскости съ xOy, тогда изъ (3)

$$\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\chi}\,ds:$$

откуда, интегрируя, получаемъ извѣстную формулу:

$$tg\,\varphi = \frac{1}{\chi}\,l, \tag{5}$$

гдѣ l разстояніе точки на производящей отъ начала координатъ, т. е. отъ точки встрѣчи производящей съ линіею съуженія.

Примѣръ: Опредѣлимъ параметръ распредѣленія касательныхъ плоскостей по производящей однополаго гиперболоида вращенія. Уравненіе поверхности

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 .$$

Уравненія пары производящихъ, встрѣчающихъ Ox:

$$x=a, \quad \frac{y}{z}=\pm\frac{a}{c} .$$

Косинусъ угла нормали къ поверхности въ какой либо точкѣ (a, y, z) на взятыхъ производящихъ съ Ox:

$$\cos\varphi=\frac{1}{a\sqrt{\frac{a^2+y^2}{a^4}+\frac{z^2}{c^4}}} .$$

Отсюда

$$tg^2\varphi=\frac{1}{c^2}\left(\frac{y^2c^2}{a^2}+\frac{z^2a^2}{c^2}\right) .$$

Если же примемъ во вниманіе уравненія производящихъ, то найдемъ

$$tg^2\varphi=\frac{1}{c^2}(z^2+y^2)$$

и слѣдовательно

$$\frac{tg\,\varphi}{\sqrt{y^2+z^2}}=\pm\frac{1}{c} .$$

Такимъ образомъ искомый параметръ оказывается равнымъ мнимой полуоси поверхности.

75. Аксоиды винтовыхъ осей. Положимъ теперь, что твердое тѣло движется произвольнымъ образомъ. Винтовая ось, вообще говоря, будетъ измѣняться; въ своемъ движеніи внутри тѣла и въ неподвижной средѣ она опишетъ двѣ линейчатыя поверхности, носящія названія подвижного и неподвижнаго аксоидовъ. Аксоиды въ каждый моментъ будутъ имѣть общую производящую—винтовую ось для даннаго момента. Покажемъ, что эти двѣ поверхности касаются другъ друга вдоль всей общей производящей Возьмемъ какую либо точку m на этой производящей; ея абсолютныя координаты пусть будутъ x, y, z, а относительныя ξ, η, ζ; скорость движенія m въ неподвижной средѣ назовемъ v, а скорость въ тѣлѣ пусть будетъ w. Тогда, дифференцируя по времени первое изъ равенствъ (1) § 57:

$$x=x_A+\xi\lambda_x+\eta\mu_x+\zeta\nu_x , \tag{6}$$

найдемъ:

$$v\cos(v,x) = x' = (x_A' + \xi\lambda_x' + \eta\mu_x' + \zeta\nu_x') + \xi'\lambda_x + \eta'\mu_x + \zeta'\nu_x .$$

Выраженіе, заключенное въ скобки, представляетъ собою результатъ дифференцированія формулы (6) при ξ, η, ζ постоянныхъ т. е. проекцію на Ox скорости u той точки твердаго тѣла, которая въ разсматриваемый моментъ совпадаетъ со взятою точкою на аксоидѣ.

Итакъ

$$v\cos(v\,x) = u\cos(u\,x) + w\,[\cos(w\,\xi)\,\lambda_x + \cos(w\,\eta)\,\mu_x + \cos(w\,\zeta)\,\nu_x] =$$

$$= u\cos(u,x) + w\cos(w,x) .$$

Подобнымъ образомъ

$$v\cos(v,y) = u\cos(u,y) + w\cos(w,y) ;$$

$$v\cos(v,z) = u\cos(u,z) + w\cos(w,z) .$$

Полученныя три равенства можно замѣнить однимъ геометрическимъ

(7) $$(v) = (u) + (w).$$

Скорость u, какъ скорость точки, лежащей на винтовой оси, параллельна общей производящей аксоидовъ, слѣд. предъидущее выраженіе доказываетъ, что три прямыхъ: производящая (u), касательная къ подвижному аксоиду (w) и касательная къ неподвижному (v), лежатъ въ одной плоскости. Другими словами касательныя плоскости къ подвижной и неподвижной поверхностямъ совпадаютъ другъ съ другомъ для любой точки на общей производящей, что и желали доказать.

Такимъ образомъ движеніе подвижного аксоида представляетъ собою катаніе по неподвижному, но катаніе, сопровождаемое скольженіемъ вдоль общей производящей, какъ это видно изъ равенства (7).

Припомнимъ теперь геометрическія теоремы относительно линейчатыхъ поверхностей, приведенныя въ § 74. Двѣ произвольно взятыя линейчатыя поверхности, вообще говоря, не могутъ служить аксоидами; изъ того обстоятельства, что аксоиды должны касаться другъ друга вдоль всей общей производящей, вытекаютъ слѣдующія соотношенія между поверхностями и ихъ положеніемъ другъ относительно друга:

1) поверхности должны быть или обѣ развертывающіяся, или обѣ косыя;

2) если поверхности обѣ косыя, то онѣ должны имѣть одинаковые параметры распредѣленія по общей производящей, линіи съуженія должны имѣть общую точку на этой производящей и въ этой точкѣ касательныя плоскости должны совпадать;

3) если поверхности обѣ развертывающіяся, то ребра возврата должны касаться общей производящей въ одной и той же точкѣ,— иначе катаніе сопровождалось бы скольженіемъ по направленію, перпендикулярному къ производящимъ.

Мы видимъ, что движеніе подвижной поверхности по неподвижной во всѣхъ случаяхъ вполнѣ опредѣленное.

Если вмѣсто прямого движенія станемъ разсматривать обращенное, то аксоиды только помѣняются своими ролями: подвижной станетъ неподвижнымъ и наоборотъ.

Примѣръ: Для движенія разсмотрѣннаго нами въ концѣ §§ 68 и 69 уравненія винтовой оси были въ абсолютныхъ координатахъ:

$$\frac{x + D\sin f}{k\sin\varphi_0\cos f} = \frac{y - D\cos f}{k\sin\varphi_0\sin f} = \frac{z}{1 + k\cos\varphi_0}, \tag{8}$$

гдѣ

$$D = ak\frac{k + \cos\varphi_0}{1 + k^2 + 2k\cos\varphi_0};$$

а въ относительныхъ:

$$\frac{\xi + d\sin kf}{-\sin\varphi_0\cos kf} = \frac{\eta - d\cos kf}{\sin\varphi_0\sin kf} = \frac{\zeta}{k + \cos\varphi_0}, \tag{9}$$

гдѣ

$$d = a\frac{1 + k\cos\varphi_0}{1 + k^2 + 2k\cos\varphi_0}.$$

Изъ первыхъ двухъ отношеній (8) находимъ:

$$D = y\cos f - x\sin f.$$

Возвышаемъ теперь всѣ отношенія въ квадратъ и пишемъ, что отношеніе суммы двухъ первыхъ предъидущихъ членовъ къ суммѣ послѣдующихъ равно послѣднему отношенію. Тогда, пользуясь предъидущимъ равенствомъ, найдемъ:

$$\frac{x^2 + y^2 - D^2}{k^2\sin^2\varphi_0} = \frac{z^2}{(1 + k\cos\varphi_0)^2},$$

или

$$\frac{x^2+y^2}{D^2}-\frac{z^2}{D_1^{\,2}}=1,$$

если

$$D_1=\frac{D\,(1+k\cos\varphi_0)}{k\sin\varphi_0}=a\,\frac{(k+\cos\varphi_0)\,(1+k\cos\varphi_0)}{\sin\varphi_0\,(1+k^2+2k\cos\varphi_0)}.$$

Совершенно такимъ же путемъ получимъ уравненіе подвижнаго аксоида изъ (9):

$$\frac{\xi^2+\eta^2}{d^2}-\frac{\zeta^2}{d_1^{\,2}}=1,$$

если

$$d_1=d\,\frac{k+\cos\varphi_0}{\sin\varphi_0}=a\,\frac{(k+\cos\varphi_0)\,(1+k\cos\varphi_0)}{\sin\varphi_0\,(1+k^2+2k\cos\varphi_0)}=D_1.$$

Обѣ поверхности—однополые гиперболоиды вращенія. Параметры распредѣленія по производящимъ у нихъ равны, такъ какъ равны мнимыя полуоси d_1 и D_1 (§ 74).

ГЛАВА VI.

Ускоренія точекъ твердаго тѣла.

76. Проекціи ускоренія точекъ твердаго тѣла на неподвижныя оси. Для полученія проекцій ускоренія $\dot{v}$ какой либо точки твердаго тѣла на оси неподвижныя стоитъ только продифференцировать по времени выраженія для проекцій скорости точки на эти направленія. Поэтому беремъ выраженія (18) § 68.

$$x' = x_A' + Q(z - z_A) - R(y - y_A);$$

$$y' = y_A' + R(x - x_A) - P(z - z_A); \quad (1)$$

$$z' = z_A' + P(y - y_A) - Q(x - x_A);$$

Дифференцируя первое изъ нихъ, найдемъ:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}x) = x'' = x_A'' + Q'(z - z_A) - R'(y - y_A) + Q(z' - z_A') - R(y' - y_A').$$

Подставляя сюда изъ (1), имѣемъ:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}x) = x_A'' + Q'(z - z_A) - R'(y - y_A) +$$
$$+ P[P(x - x_A) + Q(y - y_A) + R(z - z_A)] - \Omega^2(x - x_A). \quad (2)$$

Для двухъ другихъ осей получимъ такимъ же способомъ:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}y) = y_A'' + R'(x - x_A) - P'(z - z_A) +$$
$$+ Q[P(x - x_A) + Q(y - y_A) + R(z - z_A)] - \Omega^2(y - y_A);$$

$$\dot{v}\cos(\dot{v}z) = z_A'' + P'(y - y_A) - Q'(x - x_A) +$$

$$(2') \quad + R[P(x - x_A) + Q(y + y_A) + R(z - z_A)] - \Omega^2 (z - z_A).$$

Первые члены въ правыхъ частяхъ равны проекціямъ на неподвижныя оси ускоренія $\dot{v}_A$ полюса A:

$$x_A'' = \dot{v}_A \cos(\dot{v}_A, x); \quad y_A'' = \dot{v}_A \cos(\dot{v}_A, y); \quad z_A'' = \dot{v}_A \cos(\dot{v}_A, z).$$

Это ускореніе $\dot{v}_A$, общее всѣмъ точкамъ тѣла, носитъ названіе ускоренія поступательнаго.

Слѣдующіе члены:

$$Q'(z - z_A) - R'(y - y_A) = R'(y_A - y) - Q'(z_A - z);$$

$$R'(x - x_A) - P'(z - z_A) = P'(z_A - z) - R'(x_A - x);$$

$$P'(y - y_A) - Q'(x - x_A) = Q'(x_A - x) - P'(y_A - y),$$

по (17) § 11 представляютъ собою проекціи на неподвижныя оси момента вокругъ взятой точки (x, y, z) вектора (P', Q', R'), приложеннаго къ точкѣ A. Векторъ (P', Q', R') по своей величинѣ равняется геометрической производной по времени отъ вектора $\Omega(P, Q, R)$, мгновенной угловой скорости; поэтому векторъ (P', Q', R') мы назовемъ угловымъ ускореніемъ и обозначимъ черезъ $\dot{\Omega}$. По своимъ размѣрамъ $\dot{\Omega}$ сравнимъ съ

$$\frac{1}{(\text{един. врем.})^2}.$$

Ускореніе, зависящее отъ $\dot{\Omega}$, носитъ названіе вращательнаго; мы будемъ означать его символомъ ω. Тогда

$$Q'(z - z_A) - R'(y - y_A) = \omega \cos(\omega x);$$

$$R'(x - x_A) - P'(z - z_A) = \omega \cos(\omega y);$$

$$P'(y - y_A) - Q'(x - x_A) = \omega \cos(\omega z).$$

Иначе можно сказать, что ускореніе ω служитъ скоростью взятой точки тѣла въ томъ случаѣ, если бы тѣло вращалось около A, какъ неподвижнаго полюса, съ угловой скоростью $\dot{\Omega}$ (§ 64).

Замѣтимъ, что

$$P = \Omega \cos(\Omega x); \quad Q = \Omega \cos(\Omega y); \quad R = \Omega \cos(\Omega z);$$

$$x - x_A = \rho \cos(\rho x); \quad y - y_A = \rho \cos(\rho y); \quad z - z_A = \rho \cos(\rho z);$$

если ρ радіусъ векторъ, идущій отъ A ко взятой точкѣ тѣла. Пользуясь этими формулами, послѣднимъ членамъ равенствъ (2) можемъ дать видъ;

$$P[P(x - x_A) + Q(y - y_A) + R(z - z_A)] - \Omega^2 (x - x_A) =$$

$$= \Omega^2 \rho [\cos(\rho \Omega) \cos(\Omega x) - \cos(\rho x)];$$

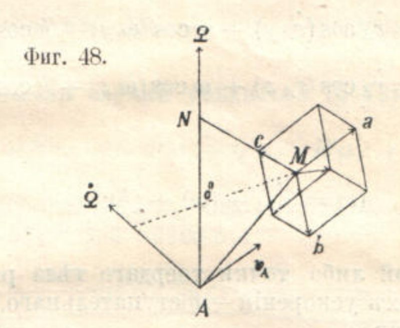
$$Q[P(x - x_A) + Q(y - y_A) + R(z - z_A)] - \Omega^2 (y - y_A) =$$

$$= \Omega^2 \rho [\cos(\rho \Omega) \cos(\Omega y) - \cos(\rho y)];$$

$$R[P(x - x_A) + Q(y - y_A) + R(z - z_A)] - \Omega^2 (z - z_A) =$$

$$= \Omega^2 \rho [\cos(\rho \Omega) \cos(\Omega z) - \cos(\rho z)].$$

Фиг. 48.



Но, если (фиг. 48) $AM = \rho$ и NM кратчайшее разстояніе M отъ оси Ω, то $AN = \rho \cos(\rho \Omega)$ и слѣдовательно

$$\rho \cos(\rho \Omega) \cos(\Omega x) - \rho \cos(\rho x) = AN \cos(AN, x) - AM \cos(AM, x);$$

$$\rho \cos(\rho \Omega) \cos(\Omega y) - \rho \cos(\rho y) = AN \cos(AN, y) - AM \cos(AM, y);$$

$$\rho \cos(\rho \Omega) \cos(\Omega z) - \rho \cos(\rho z) = AN \cos(AN, z) - AM \cos(AM, z).$$

Правыя части представляютъ собою проекціи на оси геометрической разности векторовъ AN и AM, т. е. вектора MN.

Поэтому можемъ написать:

$$P[P(x-x_A)+Q(y-y_A)+R(z-z_A)]-\Omega^2(x-x_A)=$$
$$=\Omega^2 MN\cos(MN,x)=h\cos(h,x);$$
$$Q[P(x-x_A)+Q(y-y_A)+R(z-z_A)]-\Omega^2(y-y_A)=$$
$$=\Omega^2 MN\cos(MN,y)=h\cos(h,y);$$
$$R[P(x-x_A)+Q(y-y_A)+R(z-z_A)]-\Omega^2(z-z_A)=$$
$$=\Omega^2 MN\cos(MN,z)=h\cos(h,z).$$

Ускореніе, обозначенное нами h, носитъ названіе центростремительнаго; оно равно квадрату угловой скорости, умноженному на разстояніе точки отъ мгновенной оси, и направлено по этому кратчайшему разстоянію къ оси.

Такимъ образомъ окончательно находимъ:

$$\dot v\cos(\dot v\, x)=\dot v_A\cos(\dot v_A\, x)+\omega\cos(\omega\, x)+h\cos(h\, x);$$
(3) $$\dot v\cos(\dot v\, y)=\dot v_A\cos(\dot v_A\, y)+\omega\cos(\omega\, y)+h\cos(h\, y);$$
$$\dot v\cos(\dot v\, z)=\dot v_A\cos(\dot v_A\, z)+\omega\cos(\omega\, z)+h\cos(h\, z);$$

или, короче:

$$(\dot v)=(\dot v_A)+(\omega)+(h);$$

т. е. ускореніе какой либо точки твердаго тѣла равняется геометрической суммѣ трехъ ускореній—поступательнаго, вращательнаго и центростремительнаго.

Иначе (фиг. 48) ускореніе точки M выражается діагональю паралеллепипеда $Mabc$, ребра котораго равны тремъ вышеупомянутымъ ускореніямъ: $Ma=\dot v_A$; $Mb=\omega=\dot\Omega\delta$, гдѣ δ разстояніе M отъ оси $\dot\Omega$; Mb направлено перпендикулярно къ плоскости, содержащей M и $\dot\Omega$; $Mc=MN\,.\,\Omega^2$ и идетъ по MN къ Ω.

Н

77. Проекціи ускоренія точекъ твердаго тѣла на оси неизмѣнно съ тѣломъ связанныя. Выраженія (3) умножаемъ соотвѣтственно на λ_x, λ_y, λ_z, складываемъ и находимъ

$$\dot v\cos(\dot v\,\xi)=\dot v_A\cos(\dot v_A\,\xi)+\omega\cos(\omega\,\xi)+h\cos(h\,\xi).$$

Здѣсь

$$\dot{v}_A \cos(\dot{v}_A \xi) = x_A'' \lambda_x + y_A'' \lambda_y + z_A'' \lambda_z;$$

$$\omega \cos(\omega \xi) = [Q'(z-z_A) - R'(y-y_A)]\lambda_x + [R'(x-x_A) - P'(z-z_A)]\lambda_y +$$
$$+ [P'(y-y_A) - Q'(x-x_A)]\lambda_z;$$

$$h \cos(h \xi) = [P\lambda_x + Q\lambda_y + R\lambda_z][P(x-x_A) + Q(y-y_A) + R(z-z_A)] -$$
$$- \Omega^2 [(x-x_A)\lambda_x + (y-y_A)\lambda_y + (z-z_A)\lambda_z].$$

Въ выраженіи для ускоренія вращательнаго замѣнимъ каждый изъ косинусовъ λ_x, λ_y, λ_z черезъ четыре по (5) § 58; тогда найдемъ:

$$[Q'(z-z_A) - R'(y-y_A)](\mu_y\nu_z - \mu_z\nu_y) + [R'(x-x_A) - P'(z-z_A)](\mu_z\nu_x -$$
$$- \mu_x\nu_z) + [P'(y-y_A) - Q'(x-x_A)](\mu_x\nu_y - \mu_y\nu_x) =$$
$$= (P'\mu_x + Q'\mu_y + R'\mu_z)[(x-x_A)\nu_x + (y-y_A)\nu_y + (z-z_A)\nu_z] -$$
$$- (P'\nu_x + Q'\nu_y + R'\nu_z)[(x-x_A)\mu_x + (y-y_A)\mu_y + (z-z_A)\mu_z].$$

Мы уже имѣли случай убѣдиться (§ 72) въ равенствахъ

$$p' = P'\lambda_x + Q'\lambda_y + R'\lambda_z; \; q' = P'\mu_x + Q'\mu_y + R'\mu_z; \; r' = P'\nu_x + Q'\nu_y + R'\nu_z.$$

Кромѣ того замѣнимъ абсолютныя координаты относительными по (4) § 57; тогда окажется

$$\omega \cos(\omega \xi) = q'\zeta - r'\eta.$$

Наконецъ вводимъ относительныя координаты и величины p, q, r въ ускореніе центростремительное:

$$P\lambda_x + Q\lambda_y + R\lambda_z = p;$$

$$P(x-x_A) + Q(y-y_A) + R(z-z_A) = \Omega\rho \cos(\Omega\rho) = p\xi + q\eta + r\zeta,$$

если $\rho = \sqrt{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 + (z-z_A)^2}$.

Соединяя полученные результаты въ одну формулу, найдемъ:

$$\dot{v} \cos(\dot{v}\xi) = x_A''\lambda_x + y_A''\lambda_y + z_A''\lambda_z + q'\zeta - r'\eta + p(p\xi + q\eta + r\zeta) - \xi\Omega^2. \quad (4)$$

и, конечно, еще два выраженія:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\eta) = x_A''\mu_x - y_A''\mu_y + z_A''\mu_z + r'\xi - p'\zeta + q(p\xi + q\eta + r\zeta) - \eta\Omega^2;$$

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\zeta) = x_A''\nu_x + y_A''\nu_y + z_A''\nu_z + p'\eta - q'\xi + r(p\xi + q\eta + r\zeta) - \zeta\Omega^2.$$

78. Центръ ускореній. Приравняемъ нулю правыя части выраженій (2). Тогда мы опредѣлимъ координаты x_0, y_0, x_0 такой точки твердаго тѣла, которая въ разсматриваемый моментъ не имѣетъ ускоренія. Она носитъ названіе центра ускореній. Уравненія для координатъ центра, если измѣнимъ порядокъ членовъ, можемъ написать такъ:

$$\begin{aligned}
&(P^2 - \Omega^2)(x_0 - x_A) + (PQ - R')(y_0 - y_A) + (RP + Q')(z_0 - z_A) = -x_A'';\\
(5)\quad &(PQ + R')(x_0 - x_A) + (Q^2 - \Omega^2)(y_0 - y_A) + (QR - P')(z_0 - z_A) = -y_A'';\\
&(RP - Q')(x_0 - x_A) + (QR + P')(y_0 - y_A) + (R^2 - \Omega^2)(z_0 - z_A) = -z_A''.
\end{aligned}$$

Опредѣлитель Δ этихъ уравненій разлагаемъ на сумму простѣйшихъ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} P^2 - \Omega^2 & PQ - R' & PR + Q' \\ PQ + R' & Q^2 - \Omega^2 & QR - P' \\ PR - Q' & QR + P' & R^2 - \Omega^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\Omega^2 & -R' & Q' \\ R' & -\Omega^2 & -P' \\ -Q' & P' & -\Omega^2 \end{vmatrix} +$$

$$+ P \begin{vmatrix} P & -R' & Q' \\ Q & -\Omega^2 & -P' \\ R & P' & -\Omega^2 \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} -\Omega^2 & P & Q' \\ R' & Q & -P' \\ -Q' & R' & -\Omega^2 \end{vmatrix} +$$

$$+ R \begin{vmatrix} -\Omega^2 & -R' & P \\ R' & -\Omega^2 & Q \\ -Q' & P' & R \end{vmatrix}.$$

Здѣсь мы не пишемъ вовсе опредѣлителей съ равными столбцами, такъ какъ они обращаются въ нуль. Теперь уже легко вычислить, что

$$\Delta = (PP' + QQ' + RR')^2 - (P^2 + Q^2 + R^2)(P'^2 + Q'^2 + R'^2) =$$
$$= -(QR' - RQ')^2 - (RP' - PR')^2 - (PQ' - QP')^2.$$

Опредѣлитель Δ становится нулемъ лишь для слѣдующихъ частныхъ случаевъ: 1) $P = Q = R = 0$ или $\Omega = 0$; 2) $P' = Q' = R' = 0$ или $\dot{\Omega} = 0$ и 3) $\dfrac{P}{P'} = \dfrac{Q}{Q'} = \dfrac{R}{R'}$. Если, кромѣ того, соблюдено соотвѣтственно одно изъ условій:

$$(6)\qquad x_A''P + y_A''Q + z_A''R = 0 \quad \text{или} \quad x_A''P' + y_A''Q' + z_A''R' = 0,$$

то мы найдемъ не одинъ центръ ускореній, а безчисленное множество, лежащихъ на прямой параллельной либо оси Ω, либо оси $\dot{\Omega}$. Такое обстоятельство имѣетъ мѣсто напр. для движенія тѣла параллельно плоскости. Если же для перечисленныхъ случаевъ условія (6) не соблюдены, то центра ускоренія нѣтъ.

Въ общемъ случаѣ Δ всегда меньше нуля, и слѣд. существуетъ только одна точка (x_0, y_0, z_0). Возьмемъ ее за полюсъ, тогда, вычитая (5) изъ (2), для ускоренія произвольной точки тѣла получимъ выраженія:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}x) = Q'(z-z_0) - R'(y-y_0) + P[P(x-x_0) + Q(y-y_0) + R(z-z_0)] - \Omega^2(x-x_0);$$

$$\dot{v}\cos(\dot{v}y) = R'(x-x_0) - P'(z-z_0) + Q[P(x-x_0) + Q(y-y_0) + R(z-z_0)] - \Omega^2(y-y_0);$$

$$\dot{v}\cos(\dot{v}z) = P'(y-y_0) - Q'(x-x_0) + R[P(x-x_0) + Q(y-y_0) + R(z-z_0)] - \Omega^2(z-z_0).$$

При такомъ выборѣ полюса останутся лишь два составляющихъ ускоренія—вращательное и центростремительное.

Какъ мы уже замѣтили, для движенія тѣла параллельно плоскости существуетъ не одинъ центръ, а цѣлая ось ускореній: въ каждой изъ параллельныхъ плоскостей найдется по центру. При соотвѣтственномъ выборѣ осей (§ 70) выраженія для проекцій ускоренія какой либо точки тѣла теперь будутъ по (27) § 70:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}x) = x_A'' - \theta''(y - y_A) - \theta'^2(x - x_A);$$

$$\dot{v}\cos(\dot{v}y) = y_A'' + \theta''(x - x_A) - \theta'^2(y - y_A).$$

Если координаты центра ускоренія для разсматриваемой плоскости по прежнему x_0, y_0, то вмѣсто предъидущихъ уравненій можемъ написать:

$$\begin{aligned} \dot{v}\cos(\dot{v}x) &= -\theta''(y - y_0) - \theta'^2(x - x_0); \\ \dot{v}\cos(\dot{v}y) &= \quad \theta''(x - x_0) - \theta'^2(y - y_0). \end{aligned} \tag{7}$$

Центръ ускореній всегда существуетъ, если только $\theta''^2 + \theta'^4$ не нуль. Возвышая въ квадратъ (7) и складывая, находимъ;

$$\dot{v}^2 = r^2(\theta''^2 + \theta'^4), \tag{8}$$

гдѣ $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$. Ускореніе возрастаетъ пропорціонально разстоянію точки отъ центра ускореній.

Далѣе, умножаемъ (7) соотвѣтственно на $\cos(rx) = \frac{x - x_0}{r}$ и $\cos(ry) = \frac{y - y_0}{r}$; получаемъ

$$\dot{v} \cos(\dot{v}\, r) = -\theta'^2\, r.$$

Отсюда и изъ (8) имѣемъ:

$$\cos(\dot{v}\, r) = -\frac{\theta'^2}{\sqrt{\theta''^2 + \theta'^4}} = \text{const.},$$

т. е. уголъ, образуемый ускореніемъ любой точки фигуры съ радіусомъ векторомъ, соединяющимъ эту точку и центръ ускореній, одинаковъ для всѣхъ точекъ.

ГЛАВА VII.

Относительное движеніе.

79. Движеніе точки абсолютное и относительное. Движеніе переносное. Представимъ себѣ, что точка m движется одновременно въ двухъ неизмѣняемыхъ средахъ S и Σ. Положеніе m въ S и Σ опредѣляется съ помощью системъ осей $Oxyz$ и $A\xi\eta\zeta$, неизмѣнно съ тѣлами S и Σ связанныхъ. Среды Σ и S движутся одна въ другой. Когда намъ дано движеніе тѣла Σ въ тѣлѣ S, то движеніе точки m въ Σ называется движеніемъ относительнымъ, а движеніе m въ S абсолютнымъ, данное же движеніе Σ въ S переноснымъ. Наоборотъ, когда извѣстно движеніе среды S въ средѣ Σ, то движеніе m въ S будетъ относительнымъ, а движеніе m въ Σ абсолютнымъ. Очевидно, если движеніе переносное въ первомъ случаѣ примемъ за прямое, то переносное во второмъ случаѣ будетъ обращеннымъ. Такимъ образомъ совершенно отъ нашей точки зрѣнія зависитъ, которое изъ двухъ движеній точки m назвать абсолютнымъ, которое относительнымъ.

Для дальнѣйшаго изложенія условимся полагать даннымъ — движеніе тѣла Σ въ средѣ S. Тогда связь между тремя выше упомянутыми движеніями опредѣляется формулами (1) § 57:

$$
\begin{aligned}
x &= x_A + \xi\lambda_x + \eta\mu_x + \zeta\nu_x;\\
y &= y_A + \xi\lambda_y + \eta\mu_y + \zeta\nu_y;\\
z &= z_A + \xi\lambda_z + \eta\mu_z + \zeta\nu_z;
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

если x, y, z, и ξ, η, ζ координаты, абсолютныя и относительныя, точки m относительно осей $Oxyz$, $A\xi\eta\zeta$, а x_A, y_A, z_A, $\lambda_x, \ldots \nu_z$ координаты тѣла Σ относительно среды S.

Изъ уравненій (1), находимъ для ξ, η, ζ, какъ уже имѣли въ (4) § 57, такія выраженія:

$$\xi = (x - x_A)\lambda_x + (y - y_A)\lambda_y + (z - z_A)\lambda_z;$$

(2) $$\eta = (x - x_A)\mu_x + (y - y_A)\mu_y + (z - z_A)\mu_z;$$

$$\zeta = (x - x_A)\nu_x + (y - y_A)\nu_y + (z - z_A)\nu_z.$$

Формулы (2) рѣшаютъ вопросъ объ опредѣленіи **относительнаго** движенія точки по даннымъ абсолютному и переносному. По формуламъ (1) находится **абсолютное** движеніе точки по даннымъ относительному и переносному. Опредѣлить переносное движеніе по абсолютному и относительному движенію одной только точки, вообще говоря, невозможно, такъ какъ движеніе твердаго тѣла опредѣляется **шестью** функціями времени, шестью независимыми координатами тѣла, а уравненій (1) у насъ всего **три**.

Примѣры: 1) Движеніе параллельно плоскости. Среда Σ совершаетъ Кардановское движеніе:

$$x_A = R\cos f(t);\quad y_A = R\sin f(t);\quad \theta = 2\pi - f(t).$$

Абсолютное движеніе точки дано уравненіями:

$$x = D\cos f(t);\quad y = D\sin f(t).$$

Уравненіями относительнаго движенія будутъ:

$$\xi = (D - R)\cos 2f(t);\quad \eta = (D - R)\sin 2f(t).$$

Относительная траекторія окружность: $\xi^2 + \eta^2 = (D - R)^2$.

2) Среда Σ вращается около начала координатъ O, какъ около неподвижнаго полюса:

$$x_A = y_A = z_A = 0;\quad \varphi = \alpha;\quad \psi = f(t);\quad \theta = kf(t).$$

Относительное движеніе точки m дано уравненіями:

$$\xi = R\cos kf(t);\quad \eta = -R\sin kf(t);\quad \zeta = 0.$$

Абсолютное движеніе будетъ такое:

$$x = R\cos\alpha\cos f(t);\quad y = R\cos\alpha\sin f(t);\quad z = -R\sin\alpha.$$

Уравненія абсолютной траекторіи:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2;\quad z = -R\sin\alpha.$$

80. Зависимость между скоростями абсолютнаго и относительнаго движенія точки. Дифференцируя по времени формулы (1), найдемъ:

$$x' = \xi'\lambda_x + \eta'\mu_x + \zeta'\nu_x + (x_A' + \xi\lambda_x' + \eta\mu_x' + \zeta\nu_x');$$

$$y' = \xi'\lambda_y + \eta'\mu_y + \zeta'\nu_y + (y_A' + \xi\lambda_y' + \eta\mu_y' + \zeta\nu_y'); \qquad (3)$$

$$z' = \xi'\lambda_z + \eta'\mu_z + \zeta'\nu_z + (z_A' + \xi\lambda_z' + \eta\mu_z' + \zeta\nu_z').$$

Выраженія, стоящія въ скобкахъ, представляютъ собою результаты дифференцированія (1) при ξ, η, ζ постоянныхъ, слѣд. это проекціи на оси скорости той точки твердаго тѣла Σ, которая въ разсматриваемый моментъ совпадаетъ съ движущеюся точкою m. Такая скорость называется переносною, и мы ее обозначимъ w. Если скорость точки m въ ея абсолютномъ и относительномъ движеніяхъ означимъ соотвѣтственно v и u и замѣтимъ, что $u\cos(u\xi) = \xi'$, $u\cos(u\eta) = \eta'$, $u\cos(u\zeta) = \zeta'$, то полученныя равенства (3) можемъ переписать такъ:

$$x' = v\cos(vx) = u\cos(ux) + w\cos(wx);$$

$$y' = v\cos(vy) = u\cos(uy) + w\cos(wy);$$

$$z' = v\cos(vz) = u\cos(uz) + w\cos(wz)$$

Или, короче,

$$(v) = (u) + (w).$$

Абсолютная скорость точки равна геометрической суммѣ скоростей относительной и переносной.

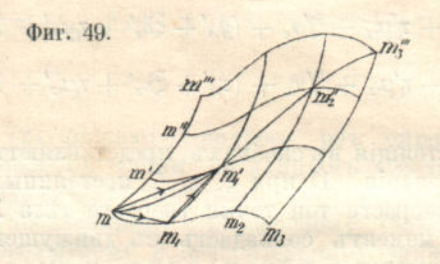
Тотъ же результатъ можно получить и геометрическимъ путемъ. Движущаяся точка m (фиг. 49) описываетъ внутри тѣла Σ относительную траекторію $m m_1 m_2 \ldots$ Эта кривая, неизмѣнно связанная съ тѣломъ Σ, движется вмѣстѣ съ Σ въ средѣ S.

Различныя точки кривой $m, m_1, m_2, \ldots$, въ которыя приходитъ движущаяся точка m для моментовъ $t, t_1, t_2 \ldots$, перемѣщаются въ средѣ S по нѣкоторымъ траекторіямъ $mm', m_1 m_1', m_2 m_2'', \ldots$ Такимъ образомъ точка m для моментовъ $t, t_1, t_2 \ldots$ въ средѣ S будетъ занимать положенія $m, m_1', m_2'', \ldots$, и ея абсолютная траекторія $m, m_1' m_2'' \ldots$ пересѣкаетъ діагонально сѣть, состоящую изъ различныхъ положеній въ средѣ S относительной траекторіи $m m_1, m' m_1', m'' m_2'', \ldots$ и путей $m m', m_1 m_1', m_2 m_2'' \ldots$ въ S тѣхъ точекъ тѣла Σ, которыя лежатъ на относительной траекторіи. Векторы mm_1', mm_1 и $m_1 m_1'$

представляютъ собою перемѣщенія точки m въ абсолютномъ движеніи (mm_1') и въ относительномъ (mm_1), а также перемѣщеніе точки m_1 тѣла Σ (m_1m_1'). Три эти вектора образуютъ замкнутый треугольникъ, т. е.

$$(m\,m_1') = (m\,m_1) + (m_1\,m_1')\,.$$

Фиг. 49.



Написанное равенство останется справедливымъ и тогда, когда всѣ векторы раздѣлимъ на $t_1 - t$. Отсюда заключаемъ, что и предѣльный векторъ

$$\text{Пред.}\left(\frac{mm_1'}{t_1 - t}\right)_{t_1=t}$$

будетъ геометрической суммой предѣльныхъ векторовъ

$$\text{Пред.}\left(\frac{mm_1}{t_1 - t}\right)_{t_1=t} \quad \text{и} \quad \text{Пред.}\left(\frac{m_1m_1'}{t_1 - t}\right)_{t_1=t}.$$

Предѣлъ $\frac{mm_1'}{t_1 - t}$ даетъ (§ 41) абсолютную скорость точки m для момента t; предѣлъ $\frac{mm_1}{t_1 - t}$ представляетъ собою относительную скорость m для того же момента. Наконецъ, въ предѣлѣ точка m_1 сливается съ m, и, слѣд. послѣдній предѣлъ служитъ скоростью переносной. Такимъ образомъ высказанное положеніе доказано.

81. Связь между ускореніями точки въ абсолютномъ и относительномъ движеніяхъ. Ускореніе поворотное. Теорема Коріолиса. Ускореніе точекъ твердаго тѣла находится пріемомъ гораздо болѣе сложнымъ (§ 76), чѣмъ скорость, за исключеніемъ случая движенія поступательнаго. Поэтому и связь между ускореніями абсолютнымъ и относительнымъ не будетъ столь простою, какъ для скоростей. Дифференцируя по времени равенства (3), найдемъ:

$$x'' = \xi''\lambda_x + \eta''\mu_x + \zeta''\nu_x + (x_A'' + \xi\lambda_x'' + \eta\mu_x'' + \zeta\nu_x'') + 2[\xi'\lambda_x' + \eta'\mu_x' + \zeta'\nu_x'];$$

$$(5)\quad y'' = \xi''\lambda_y + \eta''\mu_y + \zeta''\nu_y + (y_A'' + \xi\lambda_y'' + \eta\mu_y'' + \zeta\nu_y'') + 2[\xi'\lambda_y' + \eta'\mu_y' + \zeta'\nu_y'];$$

$$z'' = \xi''\lambda_z + \eta''\mu_z + \zeta''\nu_z + (z_A'' + \xi\lambda_z'' + \eta\mu_z'' + \zeta\nu_z'') + 2[\xi'\lambda_z' + \eta'\mu_z' + \zeta'\nu_z'];$$

Выраженія, стоящія въ круглыхъ скобкахъ, получаются изъ (1) двойнымъ дифференцированіемъ по времени при ξ, η, ζ постоянныхъ, слѣд. они служатъ проекціями на оси ускоренія той точки твердаго тѣла, которая въ разсматриваемый моментъ совпадаетъ съ движущеюся точкою m. Это ускореніе называется переноснымъ; означимъ его $\dot{w}$.

Формулы, заключенныя въ прямыя скобки, сравнимъ съ (2) § 64, дающими проекціи вращательной скорости точекъ тѣла:

$$x' = \xi\lambda_x' + \eta\mu_x' + \zeta\nu_x';$$

$$y' = \xi\lambda_y' + \eta\mu_y' + \zeta\nu_y';$$

$$z' = \xi\lambda_z' + \eta\mu_z' + \zeta\nu_z';$$

Какъ видимъ, приведенныя выраженія отличаются отъ разсматриваемыхъ лишь тѣмъ, что въ нихъ стоятъ ξ, η, ζ вмѣсто ξ', η', ζ'; слѣд. послѣдніе члены равенствъ (5) представляютъ собою удвоенную вращательную скорость точки твердаго тѣла съ координатами ξ', η', ζ'. Иначе говоря, построимъ изъ полюса A годографъ относительной скорости, тогда разбираемыя выраженія даютъ вращательную скорость точки, чертящей этотъ годографъ. Самому ускоренію, о которомъ мы говоримъ, рѣдко даютъ особое названіе, обыкновенно ускореніе равное и противоположное ему называютъ поворотнымъ. Мы обозначимъ поворотное черезъ k, а ускореніе точки въ движеніяхъ абсолютномъ и относительномъ пусть будутъ $\dot{v}$ и $\dot{u}$. Тогда, замѣчая, что:

$$\dot{u}\cos(\dot{u}\,\xi) = \xi''; \ \dot{u}\cos(\dot{u}\,\eta) = \eta''; \ \dot{u}\cos(\dot{u}\,\zeta) = \zeta''; \qquad (6)$$

равенство (5) перепишемъ такъ

$$\dot{v}\cos(\dot{v}x) = \dot{u}\cos(\dot{u}x) + \dot{w}\cos(\dot{w}x) - k\cos(kx);$$

$$\dot{v}\cos(\dot{v}y) = \dot{u}\cos(\dot{u}y) + \dot{w}\cos(\dot{w}y) - k\cos(ky);$$

$$\dot{v}\cos(\dot{v}z) = \dot{u}\cos(\dot{u}z) + \dot{w}\cos(\dot{w}z) - k\cos(kz);$$

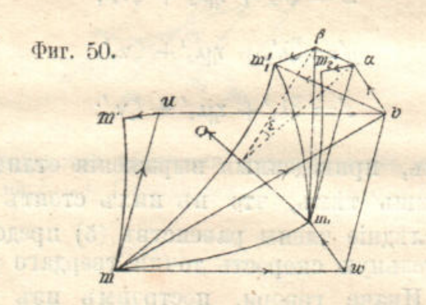
или, короче,

$$(\dot{v}) = (\dot{u}) + (\dot{w}) - (k). \qquad (7)$$

Абсолютное ускореніе точки равняется геометрической суммѣ ускореній относительнаго, переноснаго и обратнаго поворотному.

Это положеніе носитъ названіе теоремы Коріолиса. Въ справедливости ея можно убѣдиться и изъ геометрическихъ соображеній. Точка m (фиг. 50) за промежутокъ времени Δt перемѣстится по относительной траекторіи въ точку m'; за то же время точка твердаго тѣла, совпадавщая съ m, передвинется по своей траекторіи въ m_1. Построимъ скорости u и w относительнаго и переноснаго движеній и отложимъ на нихъ длины mu и mw, соотвѣтственно равныя $u\Delta t$ и $w\Delta t$. Если бы движеніе переносное было поступательное, то относительная траекторія и неизмѣнно съ нею связанный векторъ mu заняли бы положенія $m_1 m_2$ и $m_1 \alpha$, параллельныя первоначальнымъ. Но вслѣдствіе вращательнаго движенія векторъ $m_1 \alpha$ повернется около мгновенной оси $m_1 \Omega$

Фиг. 50.



полюса m_1 на нѣкоторый безконечномалый уголъ $\varepsilon = \Omega\Delta t$, если Ω мгновенная угловая скорость для разсматриваемаго момента. Абсолютная скорость v, по предъидущему, изобразится діагональю параллелограмма, построеннаго на u и w, слѣд. векторъ mv равняется $v\Delta t$. Если соединимъ прямыми точку u съ m', w съ m_1 и v съ m_1', то получимъ стрѣлки (§ 49) для движеній относительнаго, переносного и абсолютнаго. Замѣчаемъ, что

$$(vm_1') = (v\alpha) + (\alpha\beta) + (\beta m_1').$$

Но $v\alpha = wm_1$; $\beta m_1' = \alpha m_2 = um'$; въ предѣлѣ $\beta m_1'$ параллельно αm_2.

Далѣе, $\alpha\beta$ представляетъ собою перемѣщеніе точки α вслѣдствіе вращенія тѣла вокругъ оси $m_1 \Omega$ на уголъ ε, слѣд.

$$\alpha\beta = \varepsilon \,.\, m_1 \alpha \,.\, \sin(m_1\Omega, m_1\alpha) = \Omega \,.\, u \sin(\Omega, u) \,.\, \Delta t^2.$$

По (4) § 49 для полученія ускоренія надо стрѣлку раздѣлить на $\frac{1}{2}\Delta t^2$. Сдѣлавши это, найдемъ

$$\left(\frac{2\, vm_1'}{\Delta t^2}\right) = \left(\frac{2\, wm_1}{\Delta t^2}\right) + \left(\frac{2\, um'}{\Delta t^2}\right) + [2\,\Omega\, u \sin(\Omega\, u)].$$

Въ правой части равенства получаемъ въ предѣлѣ ускореніе переносное относительное, послѣдній членъ представляетъ собою ускореніе обратное поворотному. Такимъ образомъ теорема Коріолиса доказана.

Поворотное ускореніе k, какъ удвоенная вращательная скорость точки съ радіусомъ векторомъ, равнымъ u, выразится такъ:

$$k = 2\,\Omega u \sin(\Omega u) \tag{8}$$

откуда видимъ, что поворотное ускореніе исчезаетъ, 1) если переносное движеніе поступательное ($\Omega = 0$); 2) если относительная скорость параллельна мгновенной оси переносного движенія ($\sin(\Omega u) = 0$); 3) если точка находится въ относительномъ покоѣ ($u = 0$).

Проекціи ускоренія h на оси легко получаются изъ формулъ Эйлера (5) § 64 и (11) § 66, если въ нихъ замѣнить

$$x - x_A,\ y - y_A,\ z - z_A \quad \text{черезъ} \quad u\cos(ux),\ u\cos(uy),\ u\cos(uz);$$

$$\xi\ ,\quad \eta\ ,\quad \zeta \quad \text{черезъ} \quad \xi'\ ,\quad \eta'\ ,\quad \zeta'\ ;$$

такъ какъ по вышесказанному поворотное ускореніе прямо противоположно удвоенной вращательной скорости точки съ относительными координатами ξ', η', ζ', т. е. съ радіусомъ векторомъ u. Такимъ образомъ имѣемъ съ одной стороны по § 64

$$\begin{aligned} k\cos(kx) &= 2\,[R\,u\cos(uy) - Q\,u\cos(uz)]; \\ k\cos(ky) &= 2\,[P\,u\cos(uz) - R\,u\cos(ux)]; \\ k\cos(kz) &= 2\,[Q\,u\cos(ux) - P\,u\cos(uy)]; \end{aligned} \tag{9}$$

а съ другой по (12) § 66:

$$\begin{aligned} k\cos(k\xi) &= 2\,(r\eta' - q\zeta'); \\ k\cos(k\eta) &= 2\,(p\zeta' - r\xi'); \\ k\cos(k\zeta) &= 2\,(q\xi' - p\eta'). \end{aligned} \tag{10}$$

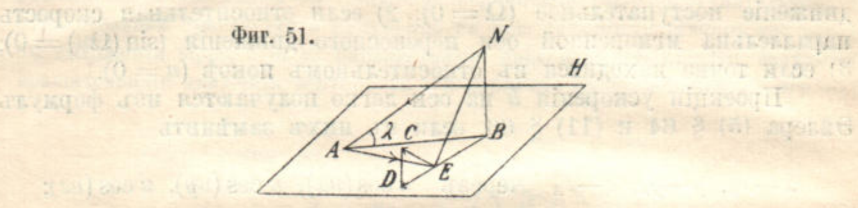
Примѣръ: Пусть среда S неизмѣнно соединена съ плоскостью земной орбиты, а среда Σ съ землею. За полюсъ A беремъ какую нибудь точку на земной поверхности. По горизонтальной плоскости H (фиг. 51), проходящей черезъ A, движется нѣкоторая точка μ съ ускореніемъ равнымъ ускоренію точки A, т. е. поступательной части переноснаго ускоренія. Опредѣлимъ проекцію на плоскость H относительнаго ускоренія точки μ.

Угловая скорость земли Ω направлена параллельно земной оси къ южному полюсу и по величинѣ

$$\Omega = \frac{2\pi}{86164{,}09} = 0{,}0000729\,\frac{1}{\text{секун. средн. врем.}}$$

Если точка μ не удаляется отъ A на значительное разстояніе, то, по малости Ω, центростремительною частью переноснаго ускоренія, пропорціональною Ω^2, мы можемъ пренебречь. Ускореніе вращательное нуль, такъ какъ Ω постоянна (прецессія и нутація въ разсчетъ не принимаются). При такихъ обстоятельствахъ все переносное ускореніе сводится къ одной поступательной части.

Фиг. 51.



Прилагая теорему Коріолиса, видимъ, что абсолютное ускореніе сокращается съ переноснымъ, и слѣд. относительное ускореніе равняется одному только поворотному.

Пусть точка A въ сѣверномъ полушаріи. NA, мгновенная ось полюса A, направлена по оси міра къ южному полюсу. Если AE представляетъ относительную скорость u точки μ, то поворотное ускореніе изобразится векторомъ EC, перпендикулярнымъ къ плоскости ANE и идущимъ такъ, какъ показано на чертежѣ; при томъ

$$EC = 2\Omega u \sin EAN.$$

Проведемъ двѣ вертикальныя плоскости ANB и EBN; первую — меридіанъ — через ось міра, вторую перпендикулярно къ AE. Тогда $\angle NEB = \frac{\pi}{2} - \angle CED$, если BD прямая; кромѣ того $\angle NAB = \lambda$, широтѣ мѣста.

Проекція EC на плоскость H равняется $EC \cdot \cos CED = EC \cdot \sin NEB$, но

$$\sin EAN = \frac{EN}{AN}; \quad \sin NEB = \frac{NB}{EN};$$

слѣдовательно

$$EC \cdot \cos CED = 2\Omega u \frac{NB}{AN} = 2\Omega u \sin \lambda.$$

Оказывается, что проекція относительнаго ускоренія перпендикулярна къ относительной скорости, направлена для сѣвернаго полушарія въ правую сторону и по величинѣ пропорціональна относительной скорости и синусу широты мѣста.

82. Движеніе твердаго тѣла относительное и абсолютное. Движеніе переносное. Пусть твердое тѣло T движется одновременно въ двухъ средахъ S и Σ. Положеніе T относительно S и Σ опредѣляется съ помощью трехъ системъ координатныхъ осей: $Oxyz$,

неизмѣнно связанныхъ съ S, $A\xi\eta\zeta$, неизмѣнно связанныхъ съ Σ и $Babc$, неизмѣнно связанныхъ съ T. Всѣ три системы осей беремъ ортогональными. Среды S и Σ движутся одна въ другой. Если намъ дано движеніе Σ въ S, то движеніе T въ Σ называется относительнымъ, движеніе T въ S абсолютнымъ, а движеніе Σ въ S переноснымъ. И здѣсь опять зависитъ отъ нашей точки зрѣнія, которое изъ двухъ движеній тѣла T назвать относительнымъ, которое абсолютнымъ. Въ одномъ случаѣ переноснымъ служитъ движеніе Σ въ S, въ другомъ обращенное движеніе, т. е. движеніе S въ Σ. Въ дальнѣйшемъ мы принимаемъ за переносное движеніе Σ въ S.

Положеніе тѣла Σ въ S опредѣляется двѣнадцатью координатами $\Sigma: x_A, y_A, z_A, \lambda_x, \lambda_y, \ldots \nu_z$. Значенія ихъ намъ уже извѣстны (§ 57). Подобнымъ образомъ для тѣла T координатами относительно S или абсолютными служатъ величины:

$$x_B, y_B, z_B, a_x, a_y, \ldots c_z,$$

а координатами T относительно Σ или относительными будутъ:

$$\xi_B, \eta_B, \zeta_B, \lambda_a, \lambda_b, \ldots \nu_c.$$

Здѣсь ξ_B, η_B, ζ_B; x_B, y_B, z_B — координаты относительныя и абсолютныя начала B осей $Babc$, значенія же символовъ для косинусовъ ясны изъ нижеслѣдующихъ схемъ:

	x	y	z
a	a_x	a_y	a_z
b	b_x	b_y	b_z
c	c_x	c_y	c_z

	ξ	η	ζ
a	λ_a	μ_a	ν_a
b	λ_b	μ_b	ν_b
c	λ_c	μ_c	ν_c

Абсолютныя координаты тѣла T черезъ относительныя и черезъ координаты среды Σ выражаются такъ:

$$x_B = x_A + \xi_B \lambda_x + \eta_B \mu_x + \zeta_B \nu_x,$$

$$y_B = y_A + \xi_B \lambda_y + \eta_B \mu_y + \zeta_B \nu_y,$$

$$z_B = z_A + \xi_B \lambda_z + \eta_B \mu_z + \zeta_B \nu_z,$$

$$a_x = \lambda_a \lambda_x + \mu_a \mu_x + \nu_a \nu_x,$$

$$b_x=\lambda_b\lambda_x+\mu_b\mu_x+\nu_b\nu_x,$$

$$c_x=\lambda_c\lambda_x+\mu_c\mu_x+\nu_c\nu_x,$$

$$a_y=\lambda_a\lambda_y+\mu_a\mu_y+\nu_a\nu_y,$$

(11)
$$b_y=\lambda_b\lambda_y+\mu_b\mu_y+\nu_b\nu_y,$$

$$c_y=\lambda_c\lambda_y+\mu_c\mu_y+\nu_c\nu_y,$$

$$a_z=\lambda_a\lambda_z+\mu_a\mu_z+\nu_a\nu_z,$$

$$b_z=\lambda_b\lambda_z+\mu_b\mu_z+\nu_b\nu_z,$$

$$c_z=\lambda_c\lambda_z+\mu_c\mu_z+\nu_c\nu_z,$$

Рѣшая эти равенства относительно количествъ ξ_B, η_B, ζ_B, λ_a, $\lambda_b, \ldots \nu_c$, т. е. относительныхъ координатъ тѣла T, получимъ:

$$\xi_B=(x_B-x_A)\lambda_x+(y_B-y_A)\lambda_y+(z_B-z_A)\lambda_z,$$

$$\eta_B=(x_B-x_A)\mu_x+(y_B-y_A)\mu_y+(z_B-z_A)\mu_z,$$

$$\zeta_B=(x_B-x_A)\nu_x+(y_B-y_A)\nu_y+(z_B-z_A)\nu_z,$$

$$\lambda_a=\lambda_x a_x+\lambda_y a_y+\lambda_z a_z,$$

$$\lambda_b=\lambda_x b_x+\lambda_y b_y+\lambda_z b_z,$$

$$\lambda_c=\lambda_x c_x+\lambda_y c_y+\lambda_z c_z,$$

(12)
$$\mu_a=\mu_x a_x+\mu_y a_y+\mu_z a_z,$$

$$\mu_b=\mu_x b_x+\mu_y b_y+\mu_z b_z,$$

$$\mu_c=\mu_x c_x+\mu_y c_y+\mu_z c_z,$$

$$\nu_a=\nu_x a_x+\nu_y a_y+\nu_z a_z,$$

$$\nu_b=\nu_x b_x+\nu_y b_y+\nu_z b_z,$$

$$\nu_c=\nu_x c_x+\nu_y c_y+\nu_z c_z.$$

Наконецъ координаты среды Σ черезъ тѣ и другія координаты тѣла T могутъ быть выражены слѣдующимъ образомъ:

$$x_A = x_B - \xi_B(\lambda_a a_x + \lambda_b b_x + \lambda_c c_x) - \eta_B(\mu_a a_x + \mu_b b_x + \mu_c c_x) -$$
$$- \zeta_B(\nu_a a_x + \nu_b b_x + \nu_c c_x),$$
$$y_A = y_B - \xi_B(\lambda_a a_y + \lambda_b b_y + \lambda_c c_y) - \eta_B(\mu_a a_y + \mu_b b_y + \mu_c c_y) -$$
$$- \zeta_B(\nu_a a_y + \nu_b b_y + \nu_c c_y).$$
$$z_A = z_B - \xi_B(\lambda_a a_z + \lambda_b b_z + \lambda_c c_z) - \eta_B(\mu_a a_z + \mu_b b_z + \mu_c c_z) -$$
$$- \zeta_B(\nu_a a_z + \nu_b b_z + \nu_c c_z);$$

$$\begin{aligned}
\lambda_x &= \lambda_a a_x + \lambda_b b_x + \lambda_c c_x,\\
\mu_x &= \mu_a a_x + \mu_b b_x + \mu_c c_x,\\
\nu_x &= \nu_a a_x + \nu_b b_x + \nu_c c_x,\\
\lambda_y &= \lambda_a a_y + \lambda_b b_y + \lambda_c c_y,\\
\mu_y &= \mu_a a_y + \mu_b b_y + \mu_c c_y,\\
\nu_y &= \nu_a a_y + \nu_b b_y + \nu_c c_y,\\
\lambda_z &= \lambda_a a_z + \lambda_b b_z + \lambda_c c_z,\\
\mu_z &= \mu_a a_z + \mu_b b_z + \mu_c c_z,\\
\nu_z &= \nu_a a_z + \nu_b b_z + \nu_c c_z.
\end{aligned} \tag{13}$$

Формулы (11) рѣшаютъ вопросъ о нахожденіи абсолютнаго движенія тѣла T по даннымъ относительному и переносному. Выраженія (12) опредѣляютъ относительное движеніе по даннымъ абсолютному и переносному. По послѣднимъ равенствамъ (13) находится переносное движеніе по даннымъ абсолютному и относительному.

Примѣръ; Движеніе параллельно плоскости. Тогда, если оси Oz, Az, Bc выбраны по нормали къ семейству параллельныхъ плоскостей, то мы можемъ положить

$$z_A = z_B = \zeta_B = \lambda_z = \mu_z = a_z = b_z = \nu_x = \nu_y = \nu_a = \nu_b = 0; \quad c_z = \nu_c = \nu_z = 1.$$

Абсолютное движеніе дано уравненіями:

$$x_B = R\cos 2f; \quad y_B = R\sin 2f;$$
$$a_x = \cos 2f; \quad a_y = \sin 2f; \quad b_x = -\sin 2f; \quad b_y = \cos 2f;$$

гдѣ $f=f(t)$ произвольная функція времени.

Относительное движеніе пусть будетъ:

$$\xi_B = R_1 \cos f;\quad \eta_B = -R_1 \sin f;$$

$$\lambda_a = \cos f;\ \lambda_b = \sin f;\ \mu_a = -\sin f;\ \mu_b = \cos f.$$

Тогда переносное опредѣлится уравненіями:

$$x_A = (R-R_1)\cos 2f;\quad y_A = (R-R_1)\sin 2f;$$

$$\lambda_x = \cos 3f;\ \mu_x = -\sin 3f;\ \lambda_y = \sin 3f;\ \mu_y = \cos 3f.$$

83. Зависимость между поступательными и угловыми скоростями въ движеніяхъ абсолютномъ и относительномъ. Положимъ, что въ разсматриваемый моментъ системы осей $Oxyz$, $A\xi\eta\zeta$ и $Babc$ совпадаютъ. Возьмемъ какую либо точку m тѣла T. По § 80 скорость абсолютная v этой точки равна геометрической суммѣ скоростей относительной u и переносной w.

$$(v) = (u) + (w). \tag{14}$$

Поступательную скорость въ движеніи абсолютномъ означимъ v_B, въ относительномъ u_B, въ переносномъ v_A; мгновенная угловая скорость абсолютная пусть будетъ Ω, относительная ω, переносная ω_1, а проекціи этихъ скоростей на совпадающія оси: P, Q, R; p, q, r; p_1, q_1, r_1. Тогда по (18) § 68, имѣемъ для проекцій на Ox:

$$v\cos(v\,x) = v_B\cos(v_B\,x) + Qz - Ry;$$

$$u\cos(u\,x) = u_B\cos(u_B\,x) + qz - ry;$$

$$w\cos(w\,x) = v_A\cos(v_A\,x) + q_1 z - r_1 y;$$

здѣсь x, y, z, координаты разсматриваемой точки m.

Отсюда по (14) вытекаетъ

$$v_B\cos(v_B\,x) + Qz - Ry = v_A\cos(v_A\,x) + u_B\cos(u_B\,x) + (q+q_1)z - (r+r_1)y.$$

Написанное равенство должно оставаться справедливымъ для произвольныхъ значеній x, y, z, слѣд.

$$v_B\cos(v_B\,x) = v_A\cos(v_A\,x) + u_B\cos(u_B\,x);$$

$$Q = q + q_1;\quad R = r + r_1. \tag{15}$$

Взявши проекціи на оставшіяся двѣ оси, найдемъ:

$$v_B \cos(v_B y) = v_A \cos(v_A y) + u_B \cos(u_B y);$$

$$v_B \cos(v_B z) = v_A \cos(v_A z) + u_B \cos(u_B z);$$

$$P = p + p_1. \qquad (15')$$

Полученные результаты можно написать короче:

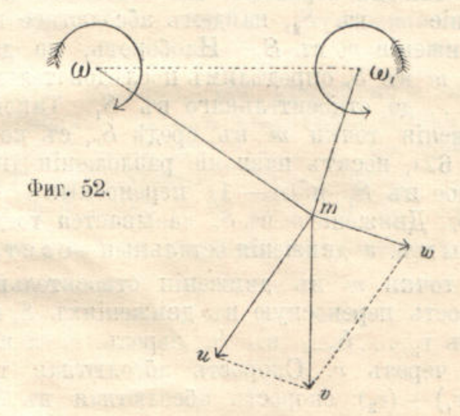
$$(v_B) = (v_A) + (u_B); \qquad (16)$$

$$(\Omega) = (\omega) + (\omega_1). \qquad (17)$$

Итакъ, если полюсы A и B совпадаютъ, то поступательная скорость въ движеніи абсолютномъ равна геометрической суммѣ поступательныхъ скоростей въ движеніяхъ относительномъ и переносномъ.

Мгновенная угловая скорость въ абсолютномъ движеніи равняется геометрической суммѣ угловыхъ скоростей въ движеніяхъ относительномъ и переносномъ. Теорема эта, конечно, имѣетъ мѣсто независимо отъ того, какія точки взяты за полюсы A и B, совпадающія или нѣтъ, такъ какъ выборъ полюса на величину и направленіе мгновенной угловой скорости вовсе не вліяетъ (§ 68).

Въ частномъ случаѣ, когда во все время движенія $(\omega) + (\omega_1) = 0$, абсолютное движеніе по (17) будетъ поступательное. Въ этомъ легко



Фиг. 52.

убѣдиться и непосредственно. Пусть (фиг. 52) ω и ω_1 слѣды соотвѣтственныхъ осей на плоскости, содержащей взятую точку m и перпендикулярной къ осямъ; при чемъ угловыя скорости ω и ω_1

равны по абсолютной величинѣ, но противоположно направлены, какъ это указано на чертежѣ стрѣлками. Тогда скорости точки m выразятся векторами mu и mw, если

$$\frac{mu}{m\omega}=\frac{mw}{m\omega_1}=\omega$$

Такъ какъ, кромѣ того, направленія mu и mw перпендикулярны къ $m\omega$ и къ $m\omega_1$, то треугольники muv и $m\omega\omega_1$ подобны, а потому векторъ mv, изображающій абсолютную скорость точки m, съ одной стороны перпендикуляренъ къ $\omega\omega_1=\delta$, а съ другой по величинѣ своей найдется изъ пропорціи

$$\frac{mu}{m\omega}=\frac{mv}{\omega\omega_1}=\omega,$$

откуда $mv=\omega\,.\,\delta$. Такимъ образомъ оказывается, что абсолютная скорость постоянна по величинѣ и направленію, т. е. вовсе не зависитъ отъ положенія точки m, что мы и желали получить.

84. Разложеніе движеній точки и твердаго тѣла. Разложеніе скорости и ускоренія точки, угловой скорости тѣла. Представимъ себѣ нѣсколько неизмѣняемыхъ средъ $S_1, S_2, \ldots S_n$ и точку m, движущуюся въ нихъ. Пусть намъ даны движенія S_1 въ S_2, S_2 въ $S_3, \ldots, S_{n-1}$ въ S_n. Тогда по предъидущему, зная относительное движеніе m въ S_1, найдемъ (§ 79) абсолютное движеніе m въ S_2; опредѣливъ такимъ образомъ относительное (для новой точки зрѣнія) движеніе m въ S_2, найдемъ абсолютное въ S_3 и т. д. до абсолютнаго движенія m въ S_n. Наоборотъ, по данному абсолютному движенію m въ S_n опредѣлимъ послѣдовательно относительное въ $S_{n-1}, S_{n-2}, \ldots$ до относительнаго въ S_1. Такой способъ разсмотрѣнія движенія точки m въ средѣ S_n, съ которымъ мы уже встрѣчались (§ 62), носитъ названіе разложенія движенія m въ S_n на относительное въ S_1 и $(n-1)$ переносныхъ S_1 въ S_2, S_2 въ $S_3, \ldots S_{n-1}$ въ S_n. Движеніе m въ S_n называется тогда с л о ж н ы м ъ или с о с т а в н ы м ъ, а движенія остальныя — с о с т а в л я ю щ и м и.

Скорость точки m въ движеніи относительно S_1 означимъ черезъ v_1, скорость переносную въ движеніяхъ S_1 въ S_2 черезъ v_2, S_2 въ S_3 черезъ $v_3, \ldots S_{n-1}$ въ S_n черезъ v_n, а абсолютную скорость m въ S_n черезъ v. Скорость абсолютная точки m въ S_2 (§ 80) будетъ $(v_1)+(v_2)$; скорость абсолютная въ S_3 представится геометрической суммою предъидущей скорости: $(v_1)+(v_2)$, и скорости (v_3) и т. д., такъ что окончательно:

$$(v)=(v_1)+(v_2)+\cdots+(v_n). \tag{18}$$

Скорость точки m въ ея движеніяхъ относительно среды S_n представляется нѣкоторымъ векторомъ v. Всякій векторъ, а слѣд. и v, мы можемъ (§ 5) разложить на составляющіе. Эти составляющіе векторы по началу однородности въ свою очередь должны изображать нѣкоторыя скорости. Но, само собою разумѣется, точка m въ своемъ движеніи относительно S_n въ данный моментъ можетъ имѣть только одну скорость, слѣд. составляющіе вектора v должны представлять собою либо скорость той же точки m относительно какой либо другой среды, либо скорость относительно той же среды S_n другой какой нибудь точки, либо скорость другой какой нибудь точки, а не m, относительно другой какой нибудь среды, а не S_n. Предъидущимъ полученнымъ нами, равенствомъ (18) и пользуются обыкновенно для того, чтобы дать кинематическій смыслъ составляющимъ разложеннаго вектора—скорости. Такъ, мы видѣли раньше (§ 41 и § 3), что скорость v точки m относительно среды, связанной съ осями $Oxyz$, равна геометрической суммѣ векторовъ $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$, $z' = \frac{dz}{dt}$ параллельныхъ соотвѣтственнымъ осямъ:

$$(v) = (x') + (y') + (z'). \tag{19}$$

Представимъ себѣ, что наша точка m движется по прямой am (фиг. 26), параллельной Ox, со скоростью x', прямая am движется поступательно въ плоскости abm со скоростью y', параллельно Oy, и наконецъ плоскость bam движется поступательно параллельно Oz со скоростью z'. Тогда x' будетъ скорость точки m относительно прямой am, y' будетъ переносная скорость прямой am относительно плоскости abm, иначе, скорость той точки прямой am, которая совпадаетъ съ m; z'—переносная скорость плоскости abm относительно среды $Oxyz$.

Само собою понятно, что приведенное толкованіе равенства (19) не единственное; такихъ толкованій можно дать много, напр. по § 42 каждую изъ скоростей x', y', z' мы можемъ разсматривать какъ скорость относительно той же среды $Oxyz$ трехъ проекцій m_x, m_y, m_z нашей точки m на координатныя оси.

Для ускореній въ движеніяхъ сложномъ и составляющихъ: $\dot{v}$, $\dot{v}_1$, $\dot{v}_2, \ldots \dot{v}_n$, можно доказать равенство, подобное (18):

$$(\dot{v}) = (\dot{v}_1) + (\dot{v}_2) + \cdots + (\dot{v}_n), \tag{20}$$

только тогда переносныя движенія по теоремѣ Коріолиса (§ 81) всѣ должны быть поступательными, между тѣмъ какъ для скоростей (§ 80) въ такомъ ограниченіи вовсе нѣтъ нужды.

Мы видѣли раньше (§ 49), что ускореніе $\dot{v}$ точки представляется слѣдующею геометрической суммою:

$$(\dot{v}) = (x'') + (y'') + (z'').$$

Разложимъ движеніе точки такъ, какъ мы это сдѣлали только что для скорости; тогда можемъ сказать, что x'' ускореніе относительное въ движеніи по прямой am (фиг. 26); y''—переносное для поступательнаго движенія прямой am по плоскости bam; z''—ускореніе переносное для поступательнаго движенія плоскости bam.

Разсужденія, подобныя предъидущимъ, можно примѣнить и къ твердому тѣлу. Пусть твердое тѣло T движется въ средѣ S_1, среда S_1 въ S_2, S_2 въ $S_3, \ldots S_{n-1}$ въ S_n. Тогда абсолютное движеніе T въ S_n разлагается на относительное въ S_1 и $(n-1)$ переносныхъ S_1 въ S_2, S_2 въ $S_3, \ldots S_{n-1}$ въ S_n. Оставляемъ въ сторонѣ скорости поступательныя, такъ какъ теорема (16) справедлива лишь при совпаденіи полюсовъ и слѣд. не даетъ ничего новаго, а лишь повторяетъ сказанное о точкѣ. Положимъ, что мгновенная угловая скорость T въ S_1 означена ω_1, угловая скорость переноснаго движенія S_1 въ S_2—ω_2; S_2 въ S_3—$\omega_3, \ldots S_{n-1}$ въ S_n—ω_n, T въ S_n—ω. Тогда по (17) послѣдовательно найдемъ:

$$(\omega) = (\omega_1) + (\omega_2) + \cdots + (\omega_n). \tag{21}$$

И этимъ равенствомъ пользуются также, какъ (18) для разложенія угловыхъ скоростей тѣла на составляющія. Такъ мы видѣли (§ 65), что угловая скорость Ω твердаго тѣла равна геометрической суммѣ трехъ угловыхъ скоростей φ', ψ', θ' вокругъ осей AN, Az и $A\zeta$. Пусть твердое тѣло вращается съ угловою скоростью θ' въ средѣ S_1; среда S_1 вращается въ средѣ S_2 съ угловою скоростью ψ' и наконецъ S_2 въ средѣ, соединенной съ осями $Axyz$, вращается со скоростью φ'. Тогда разложеніе Ω на векторы φ', ψ', θ' будетъ не только представлять собою геометрическое построеніе, весьма удобное, но имѣть и кинематическій смыслъ, а именно, абсолютная угловая скорость Ω твердаго тѣла по (21) такъ выразится черезъ относительную θ' и переносныя ψ' и φ':

$$(\Omega) = (\theta') + (\varphi') + (\psi').$$

531

N150/

16 ки